# 3 Programación lineal

La programación lineal es parte de una rama de las matemáticas relativamente joven llamada investigación operativa. La idea básica de la programación lineal es la de optimizar, es decir, hacer máxima o mínima una función, conocida con el nombre de función objetivo, con la que expresamos beneficios, gastos, tiempo de distribución de bienes en problemas logísticos, etc. Esta función está sometida a una serie de restricciones que vienen expresadas por inecuaciones lineales.

● IFSTIC. Banco de imágenes

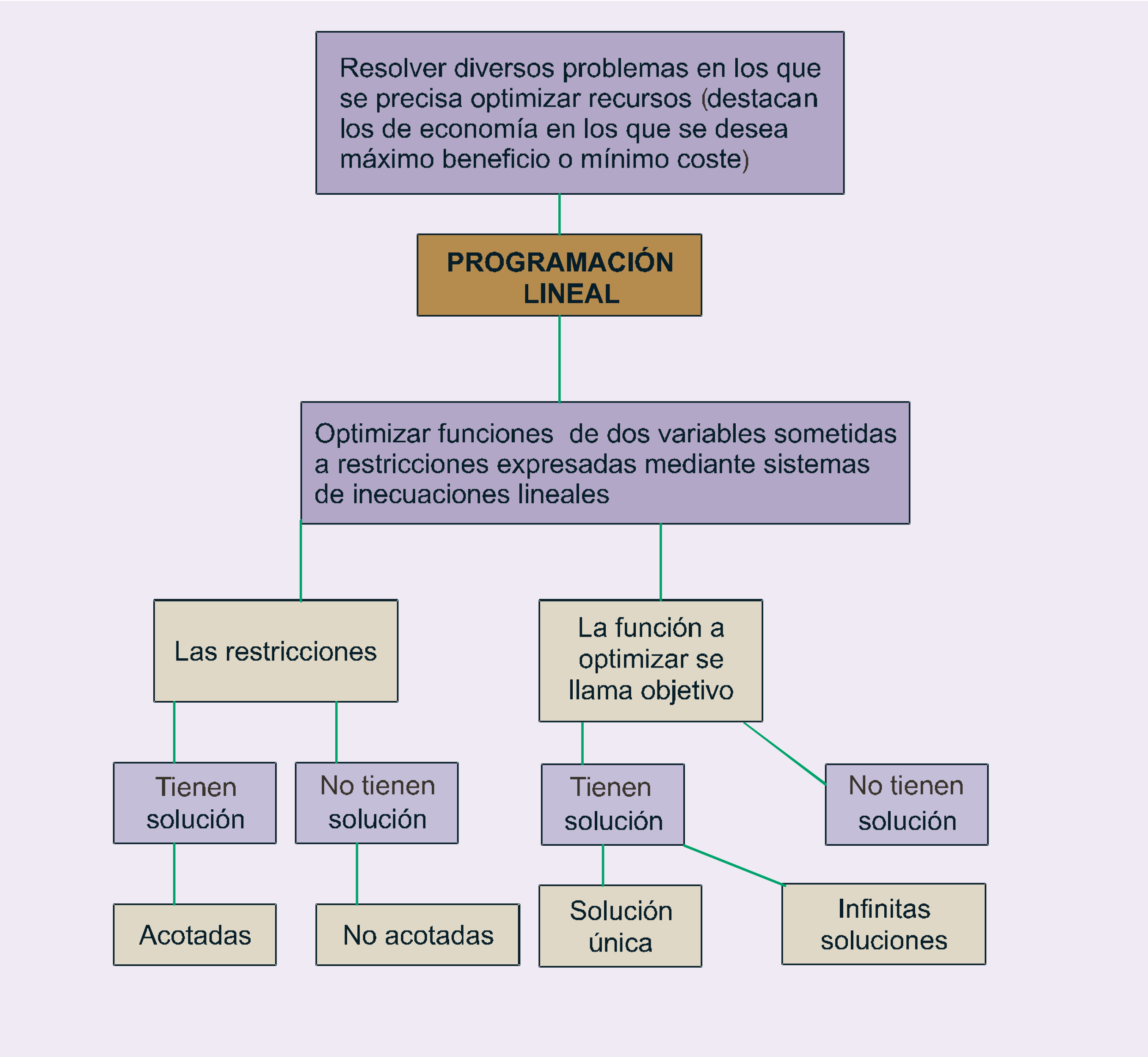
La programación lineal tuvo sus orígenes en problemas de naturaleza económica planteados durante la Segunda Guerra Mundial. Al comienzo los problemas planteados surgieron de la actividad militar, pero inmediatamente se vio que sus métodos eran aplicables en muchas áreas de la actividad económica, como por ejemplo en el transporte de mercancias.

El método más conocido de resolución de problemas de programación lineal es el Método del símplex desarrollado por el matemático norteamericano George Bernard Dantzig (1914 - 2005). El algoritmo símplex ha sido elegido como uno de los diez de mayor influencia en el desarrollo y la práctica de la ciencia y la ingeniería en el siglo XX.

El método del simplex es un procedimiento repetitivo que sirve para optimizar el valor de la función objetivo teniendo en cuenta las restricciones planteadas. A lo largo de esta Unidad únicamente resolveremos problemas de programación lineal bidimensional, con dos variables, para los que no es necesario el método simplex.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Conocer el lenguaje propio de la programación lineal.
2. Distinguir los elementos algebraicos que intervienen en los problemas de la programación lineal: función objetivo y restricciones.
3. Dominar algebraicamente la programación lineal en el caso de dos variables.
4. Resolver situaciones problemáticas que precisen de la teoría de la programación lineal.




ÍNDICE DE CONTENIDOS

# 1. Programación lineal

La teoría de la programación lineal se ha utilizado desde la segunda mitad del siglo pasado para resolver problemas concretos como el del transporte, el de la dieta y otros muchos problemas de la industria, la economía y la estrategia militar.

Los problemas que resuelve la programación lineal, tratan de encontrar el máximo y el mínimo de algunas funciones sujetas a ciertas limitaciones que se llaman restricciones.

Se puede decir que con la **programación lineal** se deben tratar aquellos problemas en los que se debe **optimizar** (calcular máximos o mínimos) una función lineal de varias variables, llamada **función objetivo**, sometida a una serie de restricciones expresadas mediante sistemas de inecuaciones lineales.

Los ejemplos siguientes sirven para hacernos una idea más clara de estos supuestos.

## Ejemplos

**1. Problema de máximos.**

Una fabrica de cosméticos vende dos tipos de cremas, *P* y Q, a razón de 40 y 20 euros el kilogramo respectivamente. Su producción máxima es de 1.000 kilogramos de cada preparado. Si su producción total no puede superar los 1.700 kilogramos, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos?

**2. Problema de mínimos.**

Una marisquería necesita como mínimo 16 cajas de langostinos, 5 cajas de nécoras y 20 de percebes. Dos almacenes, *P* y Q, se ofrecen a la marisquería para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden dicho marisco en contenedores completos. El almacén *P* envía en cada contenedor 8 cajas de langostinos, 1 de nécoras y 2 de percebes. Por su parte, Q envía en cada contenedor 2, 1 y 7 cajas, respectivamente. Cada contenedor que suministra *P* cuesta 2.100 euros, mientras que los del almacén Q cuestan 3.000 euros cada uno. ¿Cuántos contenedores debe pedir la marisquería a cada almacén para satisfacer sus necesidades mínimas con el menor coste posible?

*Soluciones:*

En los dos ejemplos está claro que tanto la cantidad que deseamos maximizar como la cantidad que deseamos minimizar podemos expresarlas en forma de funciones lineales.

Las restricciones que imponen las condiciones de ambos problemas se pueden expresar en forma de inecuaciones lineales.

Tratemos de traducir en términos matemáticos los ejemplos anteriores:

**1)** Sea $x$ los kilogramos que se producen de la crema *P* e y los que se producen de la crema Q.

La función $F(x, y) = 40x + 20y$ será el valor de la venta producida.

Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x \leq 1000 \\ y \leq 1000 \\ x + y \leq 1700 \end{cases}$

**2)** Sea $x$ los contenedores que sirve el almacén *P* e $y$ los que sirve el almacén Q.

La función $F(x, y) = 2100x + 3000y$ será la del coste de la mercancía comprada por la marisquería.

Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 8x + 2y \geq 16 \\ x + y \geq 5 \\ 2x + 7y \geq 20 \end{cases}$

# 2. Programación lineal de dos variables

Un problema de programación lineal de dos variables consiste en una traducción algebraica como la siguiente:

Optimizar (calcular máximos o mínimos) una función de dos variables $F(x, y) = ax + by$ o $z = ax + by$, llamada **función objetivo**, sometida a las restricciones expresadas mediante un sistema de inecuaciones lineales de dos variables, como el siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \geq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \geq b_2 \\ \quad \ldots + \ldots \geq \ldots \\ a_{n1}x + a_{n2}y \geq b_n \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{cases}$$

El signo mayor o igual, que aparece en todas las inecuaciones del ejemplo, puede ser sustituido en cualquiera de ellas por los otros signos de desigualdad en cada problema concreto.

En todo problema de programación lineal forman parte:

- La **función objetivo** $F(x, y) = ax + by$, que es necesario optimizar, es decir, calcular si existen sus máximos o mínimos.
- La **restricciones** que son las inecuaciones lineales que proporciona el enunciado del problema; el grupo de inecuaciones forman un sistema de inecuaciones lineales.
- El conjunto de los valores que verifican todas y cada una de las restricciones forman la **región factible**; todo punto de la región puede ser solución del problema.
- Las **regiones factibles** pueden ser acotadas (área finita) o no acotadas (área infinita). En el caso de regiones acotadas el recinto es un polígono convexo conforme hemos visto en la Unidad anterior; los vértices y la frontera de dichas regiones forman parte de la solución o no, según que las desigualdades sean en sentido amplio (≤ o ≥) o en sentido estricto (< o >).
- La solución o **soluciones óptimas** del problema, caso de existir, serán los valores $(x_0, y_0)$ de la región factible que optimizan (hacen máximo o mínimo) el valor de la función objetivo.
- Queda por estudiar un método que permita calcular fácilmente el punto o los puntos en los que sea óptima la función objetivo; trataremos un método gráfico y otro analítico.

**Actividades**

1. Una tienda vende ropa deportiva y tiene en existencia 200 pantalones y 300 camisetas. Para su venta se hacen lotes de tipos A y B. El lote A contiene 1 pantalón y 3 camisetas y el lote B está formado por 2 pantalones y 2 camisetas. De la venta de cada lote A obtiene una ganancia de 12 euros y de la venta de cada lote B 9 euros. Sabiendo que el número máximo de lotes del tipo A es de 80, determina la función objetivo que nos dé la ganancia de la venta y expresa las restricciones mediante inecuaciones.
2. Un club de personas jubiladas quiere organizar un viaje para 200 socios y socias. Contratan una agencia que dispone de 4 microbuses de 25 plazas y 5 autobuses de 50 plazas, pero sólo disponen de 6 conductores. El alquiler de los autobuses es de 160 euros por día y el de los microbuses, 70 euros. En estas condiciones, determina la función objetivo que nos dé el coste del viaje y expresa las restricciones mediante inecuaciones.

# 3. Método gráfico para obtener las soluciones

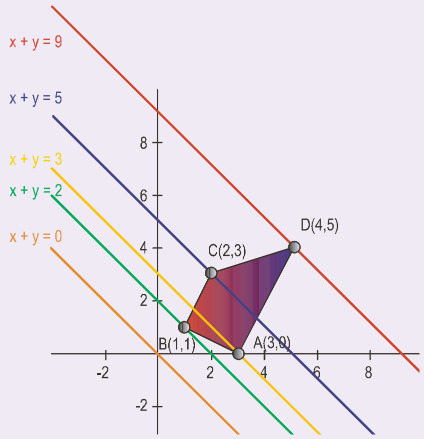
Para encontrar el valor óptimo, por el **método gráfico**, de una función objetivo de dos variables, sometida a una serie de restricciones, se realizan los pasos siguientes:

- Se dibuja el recinto limitado por las restricciones dadas mediante un sistema de inecuaciones.
- Se iguala a cero la función objetivo $ax + by = 0$ y se representa la recta, que pasa por el origen (0,0).
- Se traslada la recta anterior paralelamente a su dirección, de modo que las rectas resultantes barran la región factible.
- Se toma nota de los puntos en los que las mencionadas rectas conectan o abandonan la región factible; el valor o valores de la función objetivo en los mencionados puntos nos proporcionan el valor o valores óptimos buscados.

## Ejemplo

**3.** Optimizar la función $F(x, y) = x + y$, sometida a las restricciones siguientes: $\begin{cases} x+2y \geq 3 \\ 2x - y \geq 1 \\ x - y \geq -1 \\ 5x - y \leq 15 \end{cases}$

*Solución*:




Se localiza la región factible y sus vértices.

Se dibuja la recta que resulta de anular la función objetivo $x + y = 0$ y se traslada en dirección paralela; se ve en los desplazamientos que el haz de rectas paralelas entra en la región factible por el vértice $B$ (1, 1), donde la función objetivo vale 2 y sale por el vértice ***D*** (4, 5) donde la función objetivo vale 9.

La función objetivo toma el valor mínimo 2, en $B$ (1, 1) y el máximo 9 en $D$ (4, 5).

## Actividades

**3.** Resuelve por el método gráfico el problema enunciado en la actividad **1**, y obtén:

**a)** El número de lotes de cada tipo que deben prepararse para obtener una ganancia máxima.

**b)** La ganancia máxima.

**c)** Justificar las respuestas.

**4.** Resuelve por el método gráfico el problema enunciado en la actividad **2**, razonando qué deben hacer para que el coste del viaje sea el menor posible.

# 4. Método analítico para obtener soluciones

El **método analítico** para resolver problemas de programación lineal se basa en siguiente teorema, llamado **teorema fundamental de la programación lineal para dos variables**, cuyo enunciado en el siguiente:

> Una función objetivo de dos variables que posea máximo y mínimo únicos en una región factible acotada, toma dichos valores necesariamente en los vértices de la región.
>
> Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo (máximo o mínimo) en dos vértices, entonces la función tiene infinitas soluciones situadas en el segmento que determinan los dos vértices mencionados.
>
> Si la región factible no está acotada, la función objetivo toma el valor óptimo (máximo o mínimo) si existen, en los vértices de la región; pero puede ocurrir que no alcance alguno de dichos valores óptimos.

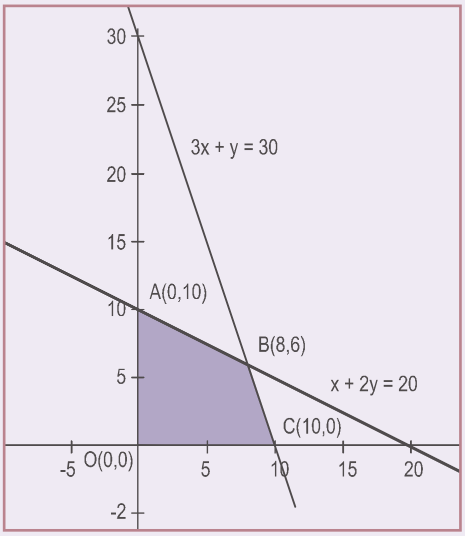
Del teorema anterior se deduce que para determinar los valores óptimos se debe:

- Dibujar el recinto limitado por las restricciones del problema.
- Calcular las coordenadas de los vértices.
- Sustituir las coordenadas de los vértice en la función objetivo y ver los valores donde se hace máxima y mínima.

## Ejemplos

**4.** Maximizar y minimizar la función $F(x, y) = 5x + 4y$, en el recinto definido por el sistema siguiente: $\begin{cases} 3x + y \leq 30 \\ x + 2y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

*Solución:*




Se dibuja la región factible.

Se calculan los vértices; $O(0,0)$, $A(0,10)$ y $C(10,0)$ son inmediatos.

Para el cálculo de $B$ se resuelve el sistema: $\begin{cases} 3x + y = 30 \\ x + 2y = 20 \end{cases}$;

la solución es $x = 8$ e $y = 6$; por tanto, $B(8, 6)$

Es un recinto acotado.

Se sustituyen los valores de los vértices en la función objetivo:

$F_O(0,0) = 0 + 0 = 0$;

$F_A(0, 10) = 0 + 40 = 40$;

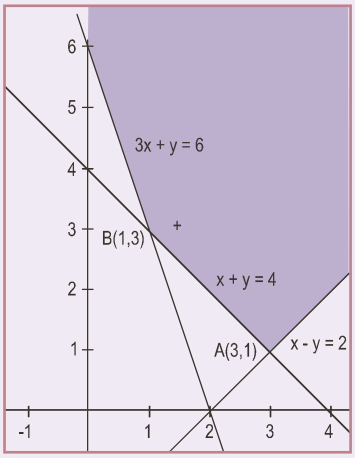
$F_B(8,6) = 5\cdot 8 + 4\cdot 6 = 64$;

$F_C(10, 0) = 5\cdot 10 + 0 = 50$.

La función tiene un mínimo en $O$ (0,0) y un máximo en $B$ (8, 6): el valor del mínimo es 0 y el del máximo 64.

**5.** Maximizar y minimizar si es posible la función $F(x, y) = x + 3y$. Sometida a las restricciones: $\begin{cases} x+y \geq 4 \\ 3x+y \geq 6 \\ x-y \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

*Solución*:




Se dibuja la región factible.

Se calculan los vértices; (0,6) es inmediato.

Para el cálculo de $A$ se resuelve el sistema: $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$; la solución es $x = 3$ e $y = 1$, por tanto, $A$ es: $A(3,1)$.

Para el cálculo de $B$ se resuelve el sistema: $\begin{cases} 3x+y=6 \\ x+y=4 \end{cases}$; $2x = 2$; $x = 1$, $y = 3$, por tanto; $B$ es: $B(1,3)$.

Valores de la función objetivo en los vértices: $F_A(3,1) = 3 + 3 = 6$; $F_B(1,3) = 1 + 9 = 10$ ; $F(0,6) = 0 + 18 = 18$.

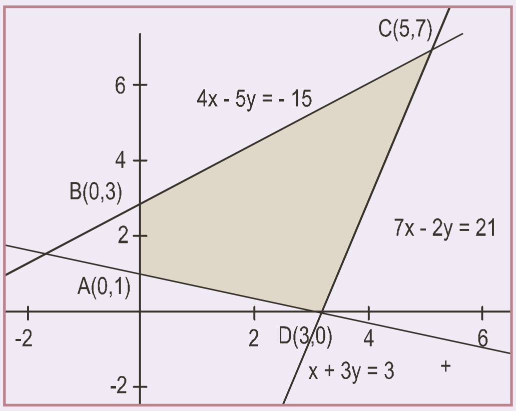
El recinto no está acotado.

La función tiene un mínimo en $A(1, 3)$; vale 6 y carece de máximo; a medida que las rectas del haz se alejan del origen, el valor de la función objetivo aumenta.

**6.** Determinar los valores máximos y mínimos de la función $F(x, y) = 0{,}8x - y$. Sometida a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} 4x-5y \geq -15 \\ 7x-2y \leq 21 \\ x+3y \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

*Solución*:




Se dibuja la región factible.

Se calculan los vértices; $A(0,1)$, $B(0,3)$ y $D(3,0)$ son inmediatos.

Para el cálculo de $C$ se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 4x-5y=-15 \\ 7x-2y=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-10y=-30 \\ -35x+10y=-105 \end{cases} \Rightarrow$$

$-27x = -135$; $x = 5$ e $y = 7$; por tanto $C(5,7)$

Valores de la función objetivo en los vértices: $F_A(0,1) = 0 - 1 = -1$; $F_B(0,3) = 0 - 3 = -3$; $F_C(5,7) = 0{,}8 \cdot 5 - 7 = -3$; $F_D(3,0) = 0{,}8 \cdot 3 - 0 = = 2{,}4$.

El recinto está acotado.

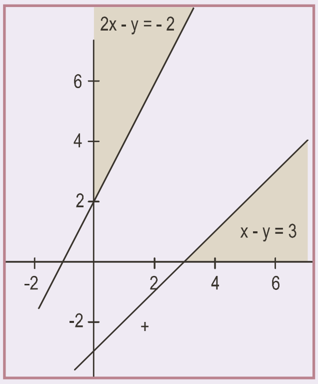
El valor de la función objetivo $F$ en los puntos $B$ y $C$ coincide, es $-3$ y es un valor mínimo, por lo que la función $F$ presenta mínimos en infinitos puntos del segmento $BC$; la función tiene un máximo en $D(3,0)$ y su valor es 2,4.

7. Determinar si es posible los máximos y mínimos de la función objetivo $F(x, y) = x + 2y$, sometida a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} 2x - y \leq -2 \\ x - y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

*Solución:*

Se dibuja la región factible.




La región factible es el conjunto vacío; por lo que el problema no tiene solución.

## Actividades

**5.** Sea el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 13 \\ x + 3y \geq -3 \\ x \geq 0 \end{cases}$

**a)** Dibuja el recinto cuyos puntos son las soluciones del sistema y obtén sus vértices.

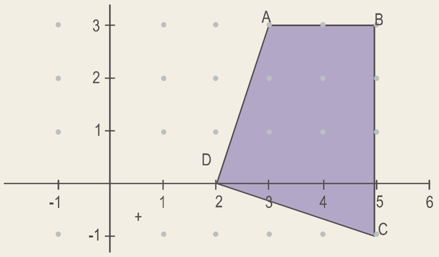
**b)** Halla los puntos del recinto en los que la función $F(x, y) = x - 2y$ toma los valores máximo y mínimo, y determina estos.

**6.** Se considera la función $F(x,y) = x - y$.

**a)** Representar el conjunto $A = \{(x,y) \,/\, 3x + y \geq 15,\ \ y - x \leq -5,\ \ 2x + 3y \leq 60,\ \ y \geq 0\}$ y calcular el valor máximo de $F(x, y)$ en $A$. ¿Alguna de las desigualdades que definen al conjunto $A$ se podrían eliminar de forma que siguiera siendo el mismo conjunto?

**b)** ¿Alcanza la función $F(x, y)$ un valor máximo en el conjunto $B = \{(x,y) \,/\, 3x + y \leq 15,\ \ y - x \leq -5,\ \ x \geq 0\}$? En caso afirmativo calcular dicho valor.

**7.** El cuadrilátero *ABCD* es la región solución de un sistema de inecuaciones lineales. Los lados del cuadrilátero también forman parte de la región solución.




**a)** Halla el valor máximo y el mínimo de la función $F(x, y) = x + 3y$ en dicha región.

**b)** ¿En qué puntos de la región solución toma la función del apartado anterior el valor máximo y en qué puntos el valor mínimo?

**8.** Maximizar y minimizar si es posible la función $F(x, y) = 3x + 2y$, sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} -7x + 5y \le 10 \\ -7x + 3y \ge -15 \\ 2x - 3y \ge -10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

**9.** Maximizar y minimizar en el primer cuadrante la función $z = 6x - 2y$, sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} 2x + y \le 1 \\ 2y \ge 1 + x \\ 4x \le 1 \end{cases}$$

**10.** Se considera la función $F(x, y) = 5x + 4y$. Determinar el punto donde la función $F(x, y)$ toma su valor máximo, con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y \le 90 \\ x + 2y \le 20 \\ 12x + 4y \le 120 \end{cases} \quad \text{con } x \ge 0 \text{ e } y \ge 0.$$

# 5. Resolución de problemas de programación lineal

En este apartado vamos a tratar, mediante algunos ejemplos, situaciones problemáticas, en las que se precisa aplicar la técnica algebraica de la programación lineal estudiada en el apartado anterior.

Debemos recordar que para encontrar la **solución de los problemas de programación lineal** que a continuación aparecen, el primer paso consiste en traducir el enunciado al **lenguaje algebraico** y a continuación resolver las expresiones algebraicas encontradas.

**Ejemplos**

**8.** Un camión de 9 Tm debe transportar mercancías de dos tipos: *A* y *B*. La cantidad de *A* no puede ser inferior a 4 Tm ni superior al doble de la cantidad de *B*. Si el transporte gana 0,03 euros por cada Kg de *A* y 0,02 euros por cada kg de *B*, se pide:

**a)** Encontrar si existe la región factible de soluciones.

**b)** Calcula utilizando el método analítico cómo se debe cargar el camión para obtener la máxima ganancia.

**c)** Determina el valor de esa ganancia.

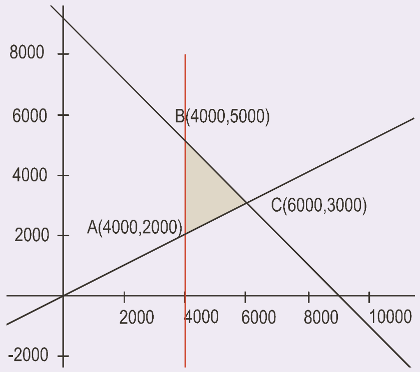
*Solución*:

Sean *x* los kg del tipo *A* e *y* los del tipo *B* que transporta el camión. El transporte está sometido a las siguientes restricciones

$$\begin{cases} x+y \le 9000 \\ x \ge 4000 \\ x \le 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \le 9000 \\ x \ge 4000 \\ x-2y \le 0 \end{cases}$$

La función objetivo a maximizar será: $F(x, y) = 0{,}03x + 0{,}02y$.

Se representa la región factible y se calculan sus vértices.




Vértice *A*: $\begin{cases} x-2y=0 \\ x=4000 \end{cases}$; *A*(4000, 2000).

Vértice *B*: $\begin{cases} x+y=9000 \\ x=4000 \end{cases}$; *B*( 4000, 3000).

Vértice *C*: $\begin{cases} x+y=9000 \\ x-2y=0 \end{cases}$; *C* (6000, 3000).

**a)** La región factible es la región convexa *ABC* del dibujo.

**b)** Se sustituyen los vértices en la función objetivo:

$F_A$ (4000, 2000) = 160 euros; $F_B$ (4000, 5000) = 220 euros; $F_C$ (6000, 3000) = 240 euros.

La máxima ganancia se obtiene si el camión se carga con 6 Tm de mercancías del tipo *A* y 3 Tm del tipo *B*.

**c)** La ganancia máxima es de 240 euros.

**9.** Una mezcla de café está formada por otras dos, *A* y *B*, de las que se tienen 500 kg de *A* y 500 kg de *B*. En la mezcla, el peso de *B* debe ser menor o igual que 1,5 veces el de *A*. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual que 600 kg. Sabiendo que cada kg de *A* cuesta 5 euros y cada kg de *B* cuesta 4 euros:

**a)** Encontrar si existe la región factible de soluciones.

**b)** Calcula los kg de *A* y *B* que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores.

**c)** Determina dicho coste mínimo.

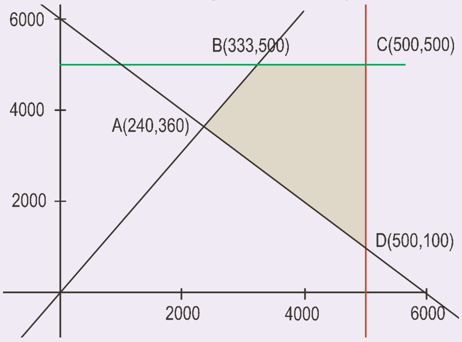
*Solución*:

Sean $x$ e $y$ el peso de $A$ y el peso de $B$ que forman la mezcla, respectivamente.

La mezcla está sometida a las restricciones siguientes: $\begin{cases} y \le 1{,}5x \\ x+y \ge 600 \\ x \le 500 \\ y \le 500 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x+10y \le 0 \\ x+y \ge 600 \\ x \le 500 \\ y \le 500 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

La función objetivo a minimizar será: $F(x, y) = 5x + 4y$.

Se representa la región factible y se calculan los vértices; $C$ (500, 500) es inmediato.




Vértice $A$: $\begin{cases} -15x+10y=0 \\ x+y=600 \end{cases}$; $A(240, 360)$.

Vértice $B$: $\begin{cases} y=500 \\ -15x+10y=0 \end{cases}$; $B(333, 500)$.

Vértice $D$: $\begin{cases} x=500 \\ x+y=600 \end{cases}$; $D(500,100)$.

**a)** La región factible es la región convexa $ABCD$ del dibujo.

Se sustituyen los vértices en la función objetivo para ver cuándo toma el valor mínimo:

$F_A(240, 360) = 2640$ euros; $F_B(333, 500) = 3665$ euros; $F_C(500, 500) = 4500$ euros; $F_D(500,100) = 2900$ euros.

**b)** El coste mínimo de la mezcla se consigue con 240 kg de la clase $A$ y 360 kg de la clase $B$.

**c)** Su valor es 2640 euros.

**10.** Un ganadero desea proporcionar a su ganadería una dieta que contenga un mínimo de 15 unidades de sustancia $A$ y otras 15 de sustancia $B$. En el mercado sólo se dispone de dos clases de compuestos: el tipo $X$ con una unidad de $A$ y cinco de $B$, y el tipo $Y$, con cinco unidades de $A$ y una de $B$. El precio del tipo $X$ es de 10 euros y el del tipo $Y$ es de 30 euros. Se pide:

**a)** Encontrar si existe la región factible de soluciones.

**b)** Cantidades que se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo.

**c)** Valor de dicho coste mínimo.

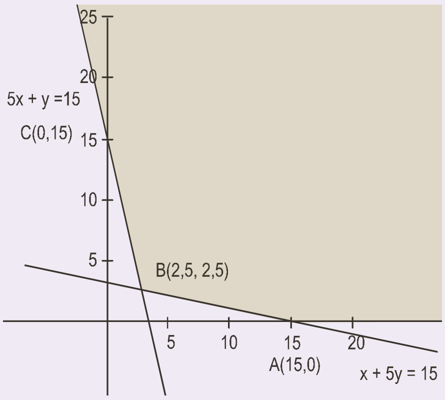
*Solución*:

Sean $x$ la cantidad del compuesto $X$ e $y$ la del $Y$ que se precisan para cumplir la dieta.

La dieta está sometida a las siguientes restricciones: $\begin{cases} x+5y \ge 15 & \text{Para que se tome la sustancia } A. \\ 5x+y \ge 15 & \text{Para que se tome la sustancia } B. \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

La función objetivo a minimizar será: $F(x, y) = 10x + 30y$.

Se representa la región factible, tal y como aparece en la gráfica y se calculan sus vértices; $A$ (15,0) y $C$ (0,15) son inmediatos.




Vértice $B$: $\begin{cases} x+5y=15 \\ 5x+y=15 \end{cases}$; $B(2{,}5,\ 2{,}5)$.

**a)** La región factible es la región no acotada $ABC$ del dibujo.

**b)** Se sustituyen los vértices en la función objetivo:

$F_A(15{,}0) = 150$ euros; $F_B(2{,}5,\ 2{,}5) = 100$ euros; $F_C(0,\ 15) = 450$ euros.

Las cantidades que se deben comprar para cumplir con la dieta son: 2,5 del compuesto $X$ y 2,5 del compuesto $Y$.

**c)** El coste mínimo de la dieta es de 100 euros.

**11.** Una familia desea comprar videojuegos y películas; los videojuegos cuestan 3 euros y las películas cuestan 2 euros. Para satisfacer a todos los miembros de la familia se desea comprar un mínimo de 4 películas y un máximo de 7, y al menos 4 videojuegos. Se tiene un presupuesto de 36 euros.

**a)** ¿Qué combinaciones de unidades de cada sistema se pueden instalar cumpliendo los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 4 películas y 10 videojuegos?

**b)** Si el objetivo es comprar el mayor número de objetos entre videojuegos y películas, ¿cuántos se pueden comprar de cada tipo?

**c)** ¿Cuál será el coste total?

*Solución*:

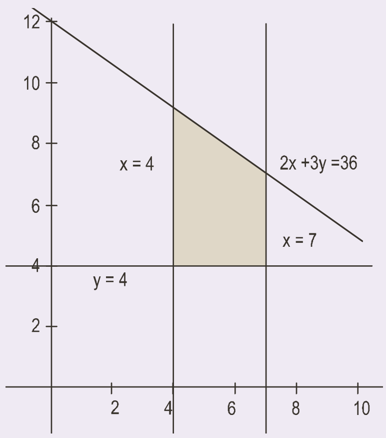
Sean $x$ la cantidad del películas e $y$ la de videojuegos que pueden comprar.

La compra está sometida a las siguientes restricciones: $\begin{cases} 4 \le x \le 7 \\ 4 \le y \\ 2x+3y \le 36 \end{cases}$

La función objetivo a maximizar será: $F(x, y) = x + y$.

El número de películas que se pueden comprar serán: 4, 5 , 6 o 7.

Cuatro películas cuestan 8 euros, quedan para comprar videojuegos 28 euros; con los que se pueden comprar un máximo de $28 : 3$; el cociente entero es 9; por tanto, no se pueden comprar 4 películas y 10 videojuegos.




Siete películas cuestan 14 euros y quedan $36 - 14 = 22$ euros; con los que se pueden comprar $22 : 3$; el cociente entero es 7 videojuegos que se pueden comprar en este caso.

**a)** A partir de la figura que es un trapecio de área $A = \frac{(6+4)4}{2} = 20$ posibilidades.

Los valores máximos de la función objetivo se encontrarán entre los vértices enteros de la figura; estos son $A(4, 4)$, $B(4, 9)$, $C(7, 7)$ y $D(7, 4)$.

**b)** El máximo número de objetos que se pueden comprar serán 7 películas y 7 videojuegos.

**c)** El coste será $7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 35$ euros.

## Actividades

**11.** Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 euros y para no fumadores al precio de 60 euros. Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3000 kg, ¿cuál debe ser la oferta de plazas de la compañía para optimizar el beneficio?

**12.** El jefe de seguridad de un museo estudia combinar 2 nuevos sistemas antirrobo: cámaras de vigilancia en las salas y alarmas en puntos estratégicos del edificio. Se quiere utilizar un mínimo de 6 cámaras para cubrir con ellas las salas más importantes y un máximo de 15 cámaras, con las que quedarían todas las salas cubiertas. Igualmente, se necesitan al menos 6 alarmas para cubrir las más importantes entradas y salidas del edificio. Finalmente, se tiene un presupuesto máximo de 36000 euros, y cada cámara cuesta 1000 euros mientras que cada alarma cuesta 500 euros.

**a)** ¿Qué combinaciones de unidades de cada sistema se pueden instalar cumpliendo los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría instalar 7 cámaras y 59 alarmas?

**b)** Si el objetivo es colocar el mayor número de dispositivos entre cámaras y alarmas, ¿cuántos ha de colocar de cada modalidad? En ese caso ¿cuál será el coste total?

**13.** Un fabricante de abanicos dispone de dos modelos, *A* y *B*. El modelo *A* requiere, para su elaboración, 20 cm$^2$ de papel, 120 cm$^2$ de lámina de madera y 1 enganche metálico. El modelo *B* requiere: 60 cm$^2$ de papel, 80 cm$^2$ de lámina de madera y 1 enganche metálico. El coste de producción de cada modelo es 1,20 euros el *A* y 1,30 euros el *B*. El precio de venta es de 1,80 euros cada uno, independientemente del modelo. Teniendo en cuenta que las existencias son de 3000 cm$^2$ de papel, 7200 cm$^2$ de lámina de madera y 70 enganches:

**a)** Representa la región factible.

**b)** Determina el número de abanicos de cada modelo que ha de fabricar para obtener un beneficio máximo.

**c)** Calcula cuál es ese beneficio.

**14.** En la preparación de dos paquetes de café, $C_1$ y $C_2$, se usa café brasileño y café colombiano. Cada paquete del tipo $C_1$ contiene 300 g. de café brasileño y 200 g. de café colombiano, y cada paquete del tipo $C_2$ contiene 100 g. de café brasileño y 400 g. de café colombiano. Con cada paquete del tipo $C_1$ se obtiene un beneficio de 0,90 euros y con cada paquete del tipo $C_2$ se obtiene un beneficio de 1,20 euros. Se dispone de 900 g de café brasileño y 1600 g. de café colombiano.

**a)** ¿Cuántos paquetes de cada tipo se han de preparar para obtener un beneficio máximo?
**b)** ¿Cuál es este beneficio máximo?

**15.** Sea S la región del plano de coordenadas de valor mayor o igual que cero y tal que sus puntos cumplen que:

(i) La media aritmética de las coordenadas es menor o igual que 5.
(ii) El doble de la abscisa más la ordenada es mayor o igual que 5.
**a)** Representa gráficamente el conjunto S.
**b)** Determina en qué puntos de S la función $f(x, y) = 2x + y$ toma el valor máximo.

**16.** Un banco dispone de 18 millones de euros para ofrecer préstamos de riesgo alto y medio, con rendimientos del 14% y 7%, respectivamente. Sabiendo que se debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio y que el dinero invertido en alto y medio riesgo debe estar a lo sumo a razón de 4 a 5, determinar cuánto debe dedicarse a cada uno de los tipos de préstamos para maximizar el beneficio y calcular éste.

**17.** Un tren de mercancías puede arrastrar, como máximo, 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones y para motocicletas no menos de la mitad de los vagones que dedica a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son 540 euros por vagón de coches y 360 euros por vagón de motocicletas, calcular cómo se deben distribuir los vagones para que el beneficio de un transporte de coches y motocicletas sea máximo y cuánto vale dicho beneficio.

**18.** Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo *A* a un precio de 9000 euros y el modelo *B* un tercio más caro. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo *A* y 10 del *B* y por el deseo de vender al menos tantas unidades del modelo *A* como del modelo *B*. Por otra parte, para cubrir gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser al menos de 36000 euros.

**a)** ¿Cuántos coches de cada modelo deberá vender para maximizar sus ingresos?

**b)** ¿Cuál es el importe de la venta?

RECUERDA

- **Programación lineal.**

  Trata aquellos problemas en los que se debe **optimizar** (calcular máximos o mínimos) una función lineal de varias variables, llamada **función objetivo**, sometida a una serie de restricciones expresadas mediante sistemas de inecuaciones lineales.

- **Programación lineal de dos variables.**

  Un problema de programación lineal de dos variables es aquel que tiene una traducción algebraica, formada por:

  - La **función objetivo** $F(x, y) = ax + by$, que es necesario optimizar.
  - La **restricciones** que son las inecuaciones lineales que proporciona el enunciado del problema.

  A partir de las expresiones algebraicas anteriores debemos encontrar:

  - **La región factible**, que son los valores que verifican todas y cada una de las restricciones; todo punto de dicha región puede ser solución del problema.
  - **La solución o soluciones óptimas** del problemas, caso de existir, serán los valores $(x_0, y_0)$ de la región factible que optimizan (hacen máximo o mínimo) el valor de función objetivo.

- **Método gráfico para obtener las soluciones.**

  Para encontrar el valor óptimo de la función objetivo con dos variables por este método, se realizan los pasos siguientes:

  - Se dibuja el recinto definido por las restricciones.
  - Se iguala a cero la función objetivo $ax + by = 0$ y se representa dicha recta.
  - Se traslada la recta anterior perpendicularmente a su dirección.
  - Los puntos en los que las mencionadas rectas conectan o abandonan la región factible serán el valor o valores óptimos buscados.

- **Método analítico para obtener soluciones.**

  Se basa en el teorema fundamental de la programación lineal para dos variables; este teorema nos indica el procedimiento a seguir para determinar los valores óptimos y es el siguiente:

  - Dibujar el recinto limitado por las restricciones del problema.
  - Calcular las coordenadas de los vértices.
  - Sustituir las coordenadas de los vértice en la función objetivo y ver los valores donde se hace máxima y mínima.

- **Resolución de problemas de programación lineal.**

  Para resolver los problemas de programación lineal se debe traducir cada enunciado a lenguaje algebraico, que en este caso consta de una función de dos variables llamada función objetivo y unas inecuaciones llamadas restricciones; las expresiones encontradas en cada problemas se resuelven por cualquiera de los métodos estudiados en esta Unidad.