PROGRAMACIÓN LINEAL: ACTIVIDADES

1. Sea el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\boxed{x + y \le 20; \quad 3x + 5y \le 70; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0}$$

a) Razone si el punto de coordenadas (4.1, 11.7) pertenece al recinto.
b) Represente dicho recinto y calcule sus vértices.
c) ¿Dónde alcanzará la función $F(x, y) = 0.6x + y$ sus valores extremos y cuáles serán éstos?

2. Represente gráficamente el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\boxed{x \ge 3\cdot(y-3); \quad 2x + 3y \le 36; \quad x \le 15; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0}$$

a) Calcule los vértices del recinto.
b) Obtenga el máximo valor de la función $F(x, y) = 8x + 12y$ en este recinto e donde se alcanza.

3. Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$\boxed{x \ge 0; \quad y \ge 0; \quad -x + 2y \le 6; \quad x + y \le 6; \quad x \le 4}$$

a) Calcule los vértices del recinto.
b) Calcule el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 2y + 1$

4. Sea la región definida por las siguientes inecuaciones:

$$\boxed{\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \ge 1; \quad -x + 2y \ge 0; \quad y \le 2}$$

a) Represente gráficamente dicha región y calcule los vértices.
b) Determine en qué puntos $F(x, y) = 3x - 6y + 4$ alcanza sus valores extremos y cuáles son.

5. Se considera el recinto definido por las inecuaciones:

$$\boxed{y - x \le 4; \quad x - y \le 4; \quad x + y \le 12; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0}$$

a) Represente el recinto y calcule los vértices.
b) Dada la función objetivo $F(x,y) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y$, determine los valores máximo y mínimo de F y los puntos donde se alcanzan.

6. De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$$\boxed{4x + 3y \ge 60; \quad y \le 30; \quad x \le \frac{10 + y}{2}; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0}$$

a) Represente el recinto y calcule los vértices.
b) Dada la función objetivo $F(x,y) = 4x - 3y - 1$, determine los valores máximo y mínimo de F y los puntos donde se alcanzan

7. Un ayuntamiento concede licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B. Para ello la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 € y la de tipo B de 300000 €. Si el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20000 € y por una de tipo B a 40000 €, ¿cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener un beneficio máximo?

8. Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 € para los del tipo A y de 40 € para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste?

9. Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 € la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 € cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo. ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir para obtener el máximo ingreso y cuánto sería?

10. Una empresa elabora dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de B necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda máquina. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda. Si la empresa obtiene un beneficio de 70 € por cada unidad de A, y de 50 € por cada unidad de B, ¿qué cantidad semanal de cada producto debe producir con objeto de maximizar el beneficio total y cuánto sería?

11. Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 €, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 €. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y calcule dicho beneficio.

12. Una fábrica produce bombillas de bajo consumo que vende a 1 € cada una, y focos halógenos que vende a 1,5 €. La capacidad máxima de fabricación es de 1000 unidades, entre bombillas y focos, si bien no se pueden fabricar más de 800 bombillas ni más de 600 focos. Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. Determine cuántas bombillas y cuántos focos debe producir para obtener el mayor ingreso posible y cuál sería éste.

13. Un estadio olímpico tiene una capacidad de 20000 espectadores. Para la asistencia a los juegos olímpicos en dicho estadio se han establecido las siguientes normas: El número de adultos no debe superar al doble del número de niños; el número de adultos menos el número de niños no será superior a 5000. Si el precio de la entrada de niño es de 10 € y la de adulto 15 €, ¿cuál es la composición de espectadores que proporciona mayores ingresos? ¿A cuánto ascenderán esos ingresos?

14. Una imprenta local edita periódicos y revistas. Para cada periódico necesita un cartucho de tinta negra y otro de color, y para cada revista uno de tinta negra y dos de color. Si sólo dispone de 800 cartuchos de tinta negra y 1100 de color, y si no puede imprimir más de 400 revistas, ¿cuánto dinero podrá ingresar como máximo, si vende cada periódico a 0,90 € y cada revista a 1,2 €?

15. Un laboratorio farmacéutico vende dos preparados A y B, a razón de 40 €/Kg y 20 €/Kg, respectivamente. Su producción máxima es de 1000 Kg de cada preparado. Si su producción total no puede superar los 1700 Kg, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcule dicha producción.

16. La candidatura de un determinado grupo político para las elecciones municipales debe cumplir los siguientes requisitos: el número total de componentes de la candidatura debe estar comprendido entre 6 y 18 y el número de hombres (x) no debe exceder del doble del número de mujeres (y). Represente el recinto asociado a estas restricciones y calcule sus vértices. ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener una candidatura que cumpla esas condiciones?

17. Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera requiere 2,5 m^2 de cristal, mientras que cada luna trasera requiere 2 m^2. La producción de una luna delantera precisa 0,3 horas de máquina de corte y cada luna trasera 0,2 horas. La empresa dispone de 1750 m^2 de cristal por semana y 260 horas semanales de máquina de corte. Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras que de lunas traseras. Determine cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas sea máximo.

18. Una compañía fabrica y venden dos modelos de lámpara L1 y L2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L1 y de 30 minutos para el L2; y una hora de trabajo de máquina para L1 y de 10 minutos para L2. Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 € y 10 € para L1 y L2, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

19. Con el comienzo del curso se va a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas; en el primer bloque pondrá 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán 6.5 y 7 €, respectivamente. ¿Cuántos paquetes le conviene poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

20. En una granja de pollos se da una dieta, para engordar, con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentra dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y 5 de B, y el otro tipo, Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 € y del tipo Y es de 30 €. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

21. Se dispone de 600 *g* de un determinado fármaco para elaborar pastillas grandes y pequeñas. Las grandes pesan 40 *g* y las pequeñas 30 *g*. Se necesitan al menos tres pastillas grandes, y al menos el doble de pequeñas que de las grandes. Cada pastilla grande proporciona un beneficio de 2 € y la pequeña de 1 €. ¿Cuántas pastillas se han de elaborar de cada clase para que el beneficio sea máximo?

22. Una empresa de transportes tiene dos tipos de camiones, los del tipo A con un espacio refrigerado de 20 m^3 y un espacio no refrigerado de 40 m^3. Los del tipo B, con igual cubicaje total, al 50% de refrigerado y no refrigerado. La contratan para el transporte de 3000 m^3 de producto que necesita refrigeración y 4 000 m^3 de otro que no la necesita. El coste por kilómetro de un camión del tipo A es de 30 € y el B de 40 €. ¿Cuántos camiones de cada tipo ha de utilizar para que el coste total sea mínimo?

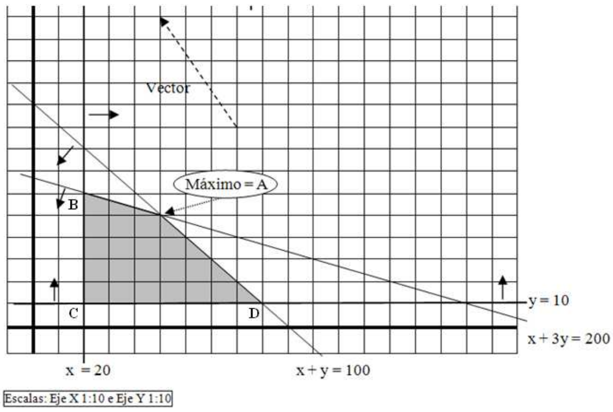
23. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 40 plazas y 10 de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 800 € y el de uno pequeño 600 €. Calcular cuántos autobuses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

24. Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello lanzan, dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón, que se venden a 30 €; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta A ni menos de 10 de la B. ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia y cuál es esta ganancia?

Incógnitas: $\begin{cases} x = \text{nº de lotes del tipo A} \\ y = \text{nº de lotes del tipo B} \end{cases} \Rightarrow$

	Cam	Pant	Beneficio unidad
Tipo A	1	1	30 €
Tipo B	3	1	50 €
	Máx:200	Máx:100	

Inecuaciones: $\begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq 10 \\ x + 3y \leq 200 \\ x + y \leq 100 \end{cases} \Rightarrow$ Función objetivo: $F(x, y) = 30x + 50y$



vértice A: $\begin{cases} x + y = 100 \\ x + 3y = 200 \end{cases} \Rightarrow A(50, 50)$

$F(50, 50) = 30 \cdot 50 + 50 \cdot 50 = 4000$ € (máximo)

vértice B: $\begin{cases} x = 20 \\ x + 3y = 200 \end{cases} \Rightarrow B(20, 60)$

$F(20, 60) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 60 = 3600$ €

vértice C: $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow C(20, 10)$

$F(20, 10) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 10 = 1100$ € (mínimo)

vértice D: $\begin{cases} y = 10 \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow D(90, 10)$

$F(90, 10) = 30 \cdot 90 + 50 \cdot 10 = 3200$ €

25. **(Junio 2008)**

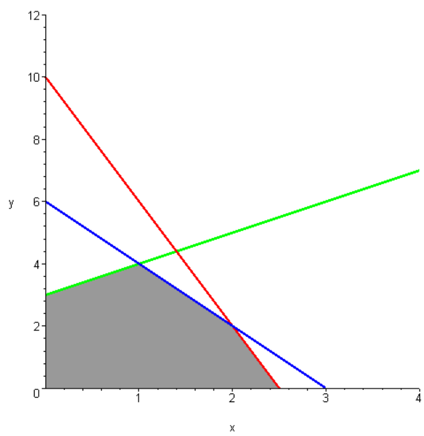
a) (2 puntos) Represente gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \leq 6;\ 4x + y \leq 10;\ -x + y \leq 3;\ x \geq 0;\ y \geq 0$$

y determine sus vértices.

b) (1 punto) Calcule el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.

La región factible viene dada por la gráfica:



Los vértices del recinto son: $(0,0),\left(\frac{5}{2},0\right),(2,2),(1,4),(0,3)$.

b) $\begin{cases} f(0,0)=-3 \\ f\left(\frac{5}{2},0\right)=7 \\ f(2,2)=9 \\ f(1,4)=9 \\ f(0,3)=3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ El máximo se alcanza en todos los puntos de la recta azul que pertenecen al recinto,

es decir, en todos los puntos de la forma $a \cdot (2, 2) + (1 - a) \cdot (1, 4)$, con $0 \le a \le 1$.

26. (Junio 2010) Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes:

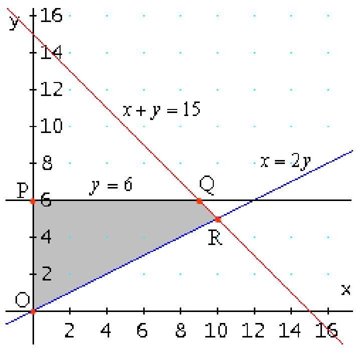
$$x + y \le 15 ; \qquad x \le 2y ; \qquad 0 \le y \le 6 ; \qquad x \ge 0$$

a) [1 punto] Represente gráficamente dicho recinto.

b) [1 punto] Calcule sus vértices.

c) [0,5 puntos] Determine el máximo valor de la función $F(x,y) = 8x + 5y$ en el recinto anterior y dónde se alcanza.

a) Las restricciones: $x + y \le 15$; $x \le 2y$; $0 \le y \le 6$; $x \ge 0$, determinan el recinto sombreado en la siguiente figura.



b) Las coordenadas de los vértices son las soluciones de los distintos sistemas que se generan:

O = (0, 0); P = (0, 6); Q: $\begin{cases} y = 6 \\ x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow Q = (9, 6)$; R: $\begin{cases} x + y = 15 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow R = (10, 5)$

c) El valor máximo de la función $F(x,y) = 8x + 5y$ en el recinto anterior se da en alguno de los vértices de esa región. Para esos puntos se obtiene:

En O: $F(0, 0) = 0$

En P: $F(0, 6) = 30$

En Q: $F(9, 6) = 72 + 30 = 102$

En R: $F(10, 5) = 80 + 25 = 105$

Por tanto, el máximo se obtiene el punto R = (10, 5); su valor es 105.

27. **(Septiembre 2008) Un nutricionista informa a un individuo que, en cualquier tratamiento que siga, no debe ingerir diariamente más de 240 mg de hierro ni más de 200 mg de vitamina B. Para ello están disponibles píldoras de dos marcas, P y Q. Cada píldora de la marca P contiene 40 mg de hierro y 10 mg de vitamina B, y cuesta 6 céntimos de euro; cada píldora de la marca Q contiene 10 mg de hierro y 20 mg de vitamina B, y cuesta 8 céntimos de euro.**
Entre los distintos tratamientos, ¿cuál sería el de máximo coste diario?

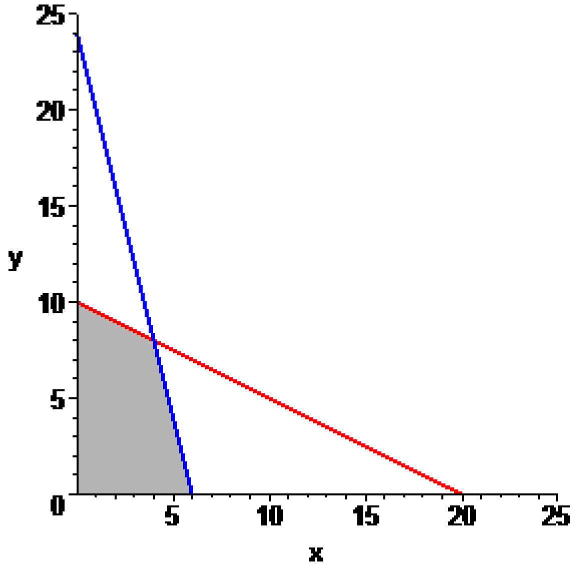
Se trata de un problema de programación lineal.
Llamaremos "*x*" a los miligramos de hierro a ingerir e "*y*" a los miligramos de vitamina *B* a ingerir. Agrupamos los datos en la siguiente tabla:

	MARCA P	MARCA Q	COSTE
HIERRO	40	10	6
VITAMINA B	10	20	8

Se trata de maximizar la función objetivo que viene dada como $f(x,y)=6x+8y$, sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} 40x+10y\le 240 \\ 10x+20y\le 200 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y\le 24(azul) \\ x+2y\le 20(rojo) \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$$

La región factible viene dada por la gráfica:



Los vértices de dicha región son los puntos (0; 0), (6; 0), rojo y azul = (4;8) y (0;10).

La función objetivo en dichos puntos vale:

$$\begin{cases} f(0,0)=0 \\ f(6,0)=36 \\ f(4,8)=88 \\ f(0,10)=80 \end{cases}$$

Por tanto, el coste máximo que son 88 céntimos de euro se alcanza con 4 píldoras de la marca *P* y 8 píldoras de la marca *Q*.

28. Resuelve el siguiente problema de programación lineal

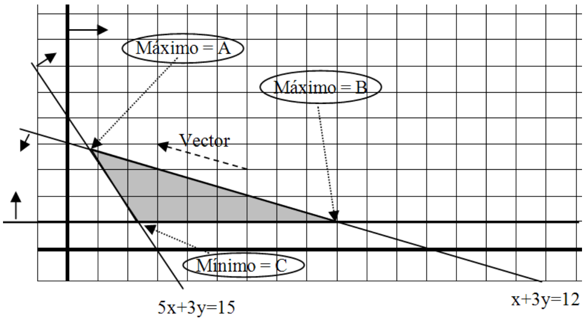
a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x + 3y \le 12; \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} \ge 1; \quad y \ge 1; \quad x \ge 0$$

b) Calcule los valores extremos de la función F (x, y) = 5 x + 15 y en dicha región

$$\text{Restricciónes:}\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 1 \\ x + 3y \le 12 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} \ge 1 \;\Rightarrow\; 5x + 3y \ge 15 \end{cases}$$

Funcion objetivo: $F(x, y) = 5x + 15y$



$$\text{Vértices}\begin{cases} A\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{15}{4}\right) & \Rightarrow F\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{15}{4}\right) = 5\cdot\dfrac{3}{4} + 15\cdot\dfrac{15}{4} = 60 \\ B(9,1) & \Rightarrow F(9,1) = 5\cdot 9 + 15\cdot 1 = 60 \\ C\left(\dfrac{12}{5},1\right) & \Rightarrow F\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{15}{4}\right) = 5\cdot\dfrac{12}{5} + 15\cdot 1 = 27 \quad \text{(mínimo)} \end{cases}$$

El máximo se alcanza el segmento $\overline{AB}$

EJERCICIOS SELECTIVIDAD ÚLTIMAS CONVOCATORIAS RESUELTOS

JUNIO 2013

EJERCICIO 1 (B)

Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 200 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,

a) (2 puntos) ¿Cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?

b) (0'5 puntos) ¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?

Solución

Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,

a)

¿Cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?

"x" = Número de tapices tipo A.
"y" = Número de tapices tipo B.
Función Objetivo **F(x,y) = 2000x + 3000y**. (vende el tipo A a 2000€ y el tipo A a 3000€)
Restricciones:

	Tipo A	Tipo B	Cantidad
Hilo de seda	1	2	500
Hilo de plata	2	1	400
Hilo de oro	0	1	225

Mirando la tabla tenemos: $x + 2y \le 500$; $2x + y \le 400$; $y \le 225$
Si se vende todo lo que se fabrica: $x \ge 0$, $y \ge 0$

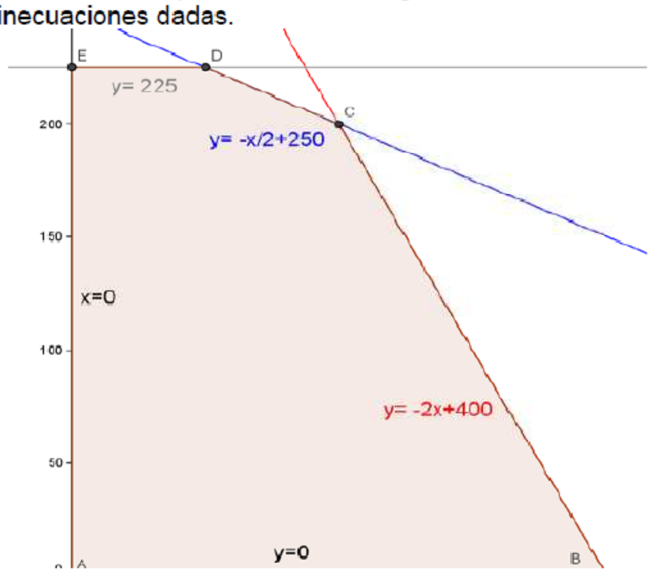
Las desigualdades $x + 2y \le 500$; $2x + y \le 400$; $y \le 225$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas,

$$x + 2y = 500;\quad 2x + y = 400;\quad y = 225;\quad x = 0,\ y = 0,$$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -x/2 + 250;\quad y = -2x + 400;\quad y = 225;\quad x = 0,\ y = 0$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De $x = 0$ e $y = 0$. Punto de corte A(0,0).
De $y = 0$ e $y = -2x+400$, tenemos $0 = -2x+400$, luego $x = 200$. Punto de corte B(200,0).
De $y = -2x + 400$ e $y = -x/2 + 250$, tenemos $-2x + 400 = -x/2 + 250$, de donde "$4x+800 = -x+500$", es decir $300 = 3x$, luego "$x = 100$" e "$y = 200$", y el punto de corte es C(100,200)

De $y = 225$ e $y = -x/2 + 250$, tenemos $225 = -x/2 + 250$, de donde "$450 = -x+500$", es decir $x = 50$, luego "$x = 50$" e "$y = 225$", y el punto de corte es D(50,225)
De $x = 0$ e $y = 225$. Punto de corte es E(0,225)

Vemos que los vértices del recinto son: A(0,0), B(200,0), C(100,200), D(50,225) y E (0,225).

Calculemos el máximo de la función $F(x,y) = 2000x + 3000y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(200,0), C(100,200), D(50,225) y E (0,225). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F(0,0) = 2000(0)+3000(0) = 0$; $F(200,0) = 2000(200)+3000(0) = 400000$; $\mathbf{F(100,200)} = 2000(100) + 3000(200) = \mathbf{800000}$; $F(50,225) = 2000(50)+3000(225) = 775000$; $F(0,225) = 2000(0) + 3000(225) = 675000$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 800000** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(100,200). Es decir el máximo beneficio se alcanza vendiendo 100 tapices tipo A y 200 tapices tipo B**
b)
¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?

100 tapices de tipo A equivalen a $1 \cdot 100 = 100$ kg de hilo de seda y $2 \cdot 100 = 200$ kg de hilo de plata.
200 tapices de tipo B equivalen a $2 \cdot 200 = 400$ kg de hilo de seda, $1 \cdot 200 = 200$ kg de hilo de plata y $1 \cdot 200 = 200$ kg de hilo de oro..

Hilo de seda gastado = 100 + 400 = 500. **Quedan** 500 – 500 = **0 kg de hilo de seda.**
Hilo de plata gastado = 200 + 200 = 400. **Quedan** 400 – 400 = **0 kg de hilo de plata.**
Hilo de oro gastado = 200. **Quedan** 225 – 200 = **25 kg de hilo de oro.**

JUNIO 2012

EJERCICIO 1 (A)

Sea el recinto limitado por las siguientes inecuaciones:

$$y + 2x \geq 2; \quad 2y - 3x \geq -3; \quad 3y - x \leq 6.$$

a) (1 punto) Represente gráficamente dicho recinto.

b) (1 punto) Calcule sus vértices.

c) (0'5 puntos) Obtenga el valor mínimo de la función $F(x,y) = 2x - y$ en el recinto anterior, así como donde lo alcanza.

Solución

(a) y (**b**)

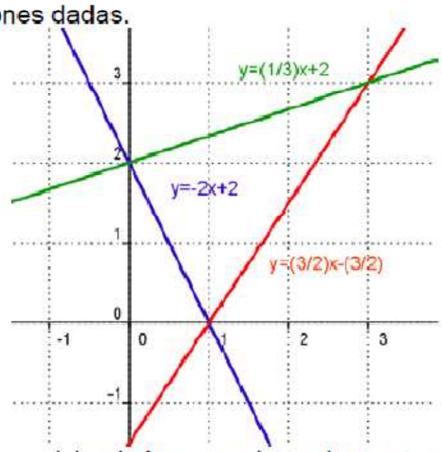
Las desigualdades $y + 2x \geq 2$; $2y - 3x \geq -3$; $3y - x \leq 6$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas,

$$y + 2x = 2; \quad 2y - 3x = -3; \quad 3y - x = 6,$$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -2x + 2; \quad y = (3/2)x - (3/2); \quad y = (1/3)x + 2,$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = -2x + 2$ e $y = (3/2)x - (3/2)$; tenemos $-2x + 2 = (3/2)x - (3/2)$, de donde "$-4x+4 = 3x-3$", es decir sale $7=7x$, de donde "$x = 1$" e "$y = 0$", y el punto de corte es A(1,0)

De $y = -2x + 2$ e $y = (1/3)x + 2$; tenemos $-2x + 2 = (1/3)x + 2$, de donde "$-6x+6 = x+6$", es decir sale $0=7x$, de donde "$x = 0$" e "$y = 2$", y el punto de corte es B(0,2)

De $y = (1/3)x + 2$ e $y = (3/2)x - (3/2)$; tenemos $2x + 12 = 9x - 9$, de donde "$21 = 7x$", de donde "$x = 3$" e "$y = 3$", y el punto de corte es C(3,3)

acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(1,0); B(0,2) y el C(3,3).

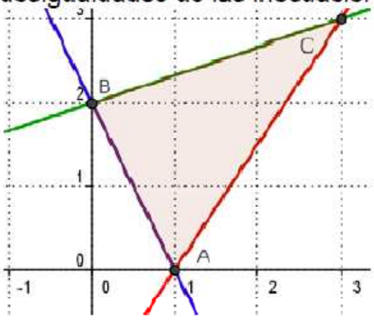
$F(1,0) = 2 - 0 = 2$, $\qquad F(0,2) = 0 - 2 = -2$, $\qquad F(3,3) = 6 - 3$

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el mínimo absoluto de la función F en la región es -2** (el valor menor en los vértices) **y se alcanza en el punto (0,2).**

Fijándonos en la resolución de las ecuaciones los vértices son:

A(1,0); B(0,2) y el C(3,3).

El recinto, fijándonos de nuevo en las desigualdades de las inecuaciones es:



(c)

Consideremos la función $F(x,y) = 2x - y$.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afianza su máximo y mínimo absoluto en la región

2 Programación lineal

Propuesta A

1. Resuelve las siguientes inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales:

a) $3x - \frac{x+1}{5} \geq \frac{2-x}{2} - 3$ b) $\begin{cases} 2x-3>1 \\ x-2 \leq 5 \end{cases}$ c) $4x + 2y < 10$ d) $\begin{cases} 2x-y<-1 \\ x-2y \geq -5 \end{cases}$

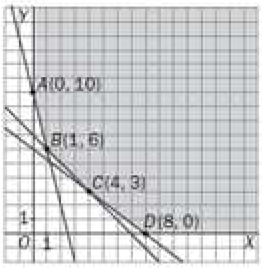
2. Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2y<8 \\ 2x-y<6 \\ y+2>0 \\ x>0 \end{cases}$$

3. Maximiza y minimiza la función $f(x, y) = 5x + 4y$ sujeta al siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} 2x+y \leq 6 \\ 4x+y \leq 10 \\ -x+y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

4. Indica las restricciones que determinan la siguiente región factible asociada a un problema de programación lineal.



5. Halla los puntos de la región del plano determinada por las inecuaciones:

$$x + y \geq 2 \qquad x \leq y \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad y \leq 5$$

en los que la función $f(x, y) = 3x + 4y$ alcanza sus valores mínimo y máximo.

6. Un pastelero tiene 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 27,5 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles, P_1 y P_2. Para hacer una docena de pasteles del tipo P_1 necesita 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, y para hacer una docena del tipo P_2 necesita 6 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.

El beneficio que obtiene por una docena de pasteles del tipo P_1 es de 4 euros, y por una docena del tipo P_2, de 6 euros. Utilizando las técnicas de la programación lineal, halla el número de docenas de pasteles de cada clase que tiene que fabricar para que el beneficio sea máximo. Determina dicho beneficio.

Propuesta B

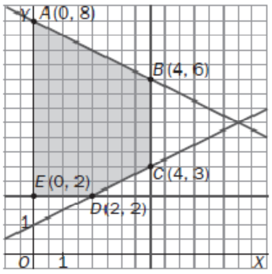
1. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales:

a) $\frac{x-5}{3} - \frac{1-2x}{4} \leq 3x - 2$ b) $2x - 3y < 6$

2. Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 4y > -24 \\ x - 4 \leq 0 \\ 2x - y - 1 < 0 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

3. Indica las restricciones que determinan la siguiente región factible asociada a un problema de programación lineal.



4. Maximiza y minimiza la función $f(x, y) = 2x + y$ sujeta al siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 16 \\ 2x + y \leq 14 \\ 2x - 3y \leq 6 \\ x + 3y \geq 3 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{cases}$$

5. Se dispone de 126 000 € para invertir en bolsa. Los expertos recomiendan dos tipos de acciones: las de tipo *A*, que rinden el 10%, y las de tipo *B*, que rinden el 8%. Se decide invertir en las de tipo *A* un máximo de 78 000 € y un mínimo de 3600 €. Por otra parte, se desea que la inversión en las acciones de tipo *A* no sea mayor que el doble de la inversión en las acciones de tipo *B*.

a) Plantea la función objetivo.

b) Resuelve gráficamente el sistema de inecuaciones y representa la región factible.

c) Determina cómo se ha de repartir la inversión para obtener el mayor rendimiento y calcúlalo.

6. Se desea dotar de un sistema de calefacción a un edificio, y para ello se consideran las posibilidades siguientes: instalar una caldera de gas, instalar paneles solares, o una combinación de ambas alternativas.

Con esta instalación se quiere atender unas necesidades mínimas de calefacción de 800 kcal/h y unas necesidades mínimas de agua caliente de 300 kcal/h. Por cada unidad de producción instalada de caldera de gas y paneles solares se puede hacer frente a las siguientes necesidades (medidas en kcal/h):

	Calefacción	Agua caliente
Caldera de gas	6	1
Paneles solares	2	2

Los costes de instalación por unidad de producción son de 200 € para la de caldera de gas, y de 100 € para la de paneles solares. Por limitaciones de espacio no pueden instalarse más de 200 unidades de producción de calderas de gas.

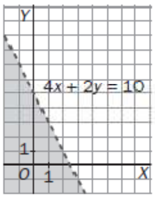
Determina el número de unidades de producción de caldera de gas y de paneles solares que, una vez instaladas, hacen frente a las necesidades anteriores con el menor coste de instalación posible.

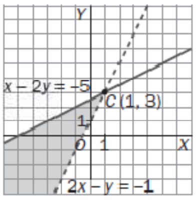
Soluciones propuesta A

1. a) $3x-\dfrac{x+1}{5}\geq\dfrac{2-x}{2}-3\Rightarrow\dfrac{30x-2x-2}{10}\geq\dfrac{10-5x-30}{10}\Rightarrow$

$\Rightarrow 33x\geq-18\Rightarrow x\geq-\dfrac{18}{33}\Rightarrow x\in\left[-\dfrac{18}{33},+\infty\right)$

b) $\begin{cases}2x-3>1\\x-2\leq5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x>4\\x\leq7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\x\leq7\end{cases}\Rightarrow x\in(2,7]$

c) 

d) 

2. Se representan gráficamente las rectas de ecuaciones

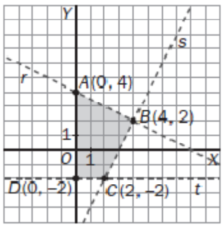
$r: x+2y=8$ $s: 2x-y=6$ $t: y=-2$ $x=0$

Se calculan los puntos de intersección de estas rectas:

$r\cap Y=A(0,4)$ $s\cap t=C(2,-2)$

$r\cap s=B(4,2)$ $t\cap Y=D(0,-2)$

Se halla cuál de los dos semiplanos que determina cada una de las rectas corresponde a la inecuación planteada. La intersección de todos estos semiplanos constituye la solución del sistema de inecuaciones.



3. Se representan gráficamente las rectas

$r: 2x+y=6$ $s: 4x+y=10$ $t: -x+y=3$

$x=0$ $y=0$

Se determina la región factible y se calculan, mediante intersección de las rectas, los vértices de la misma:

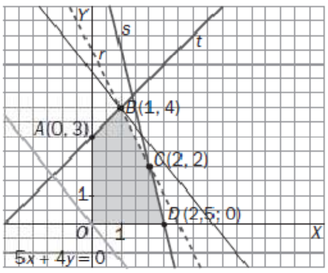
$t\cap Y=A(0,3)$ $s\cap X=D(2{,}5;0)$

$r\cap t=B(1,4)$ $X\cap Y=E(0,0)$

$r\cap s=C(2,2)$

Para calcular los puntos en los que la función objetivo alcanza el máximo y el mínimo, como estos se alcanzan en un vértice de la región factible, se calcula el valor de la función $f(x, y)$ en cada uno de los vértices:

$$\begin{cases}f(0,3)=12\\f(1,4)=21\\f(2,2)=18\\f\left(\dfrac{5}{2},0\right)=\dfrac{25}{2}\\f(0,0)=0\end{cases}$$



Se observa que el máximo se alcanza en el punto $B(1, 4)$, en el que la función vale 21, y el mínimo, en el punto $E(0, 0)$, en el que la función vale 0.

Gráficamente, también se comprueba el resultado anterior.

4. Se calculan las ecuaciones de las rectas:

r, que pasa por los puntos $A(0, 10)$ y $B(1, 6)$:

$r: 4x+y-10=0$

s, que pasa por los puntos $B(1, 6)$ y $C(4, 3)$:

$s: x+y-7=0$

y t, que pasa por $C(4, 3)$ y $D(8, 0)$:

$t: 3x+4y-24=0$

Los ejes X e Y tienen como ecuaciones $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente. Por tanto, la región representada se corresponde con el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{cases}4x+y-10\geq0\\x+y-7\geq0\\3x+4y-24\geq0\\x\geq0;\quad y\geq0\end{cases}$$

5. Se representan gráficamente las rectas de ecuaciones

$r: x+y=2$ $s: x=y$ $t: y=5$ $x=0$ $y=0$

Se determina la región factible y se hallan los vértices de la misma:

$t\cap Y=A(0,5)$ $r\cap s=C(1,1)$

$t\cap s=B(5,5)$ $r\cap Y=D(0,2)$

Hay que maximizar la función:

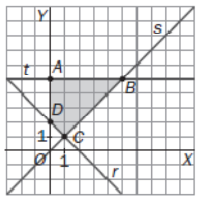
$f(0, 5) = 20$

$f(5, 5) = 35$

$f(1, 1) = 7$

$f(0, 2) = 8$

El máximo se alcanza en el punto $B(5, 5)$, en el que la función vale 35.



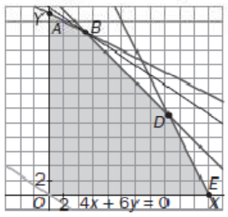
6. En la tabla se resumen los datos del problema:

	Harina (150 kg)	Azúcar (22 kg)	Mantequilla (27,5 kg)
P_1 (x)	3	1	1
P_2 (y)	6	0,5	1

La función a maximizar es $B(x, y) = 4x + 6y$.

Las restricciones y la región factible son:

$$\begin{cases}3x+6y\leq150\\x+0{,}5y\leq22\\x+y\leq27{,}5\\x\geq0;\quad y\geq0\end{cases}$$



Los vértices de la región factible son $A(0, 25)$, $B(5; 22{,}5)$, $D(16{,}5; 11)$ y $E(22, 0)$.

La función objetivo alcanza el máximo en uno de esos vértices: $B(0, 25)$ = 150 €, $B(5; 22{,}5)$ = 155 €, $B(16{,}5; 11)$ = 132 €, $B(22, 0)$ = 88 €

Por tanto, debe hacer 5 docenas de pasteles de tipo A y 22,5 docenas de tipo B para obtener el máximo beneficio, el cual es de 155 €.

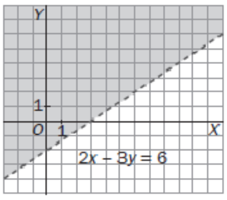
Gráficamente se observa que ese es el resultado.

Soluciones propuesta B

1. a) $\frac{x-5}{3}-\frac{1-2x}{4}\le 3x-2 \Rightarrow \frac{4x-20-(3-6x)}{12}\le\frac{36x-24}{12}\Rightarrow$

$\Rightarrow -26x\le -1 \Rightarrow x\ge\frac{1}{26}\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{26},+\infty\right]$

b)



2. Se representan gráficamente las rectas de ecuaciones

$r: 3x - 4y = -24$ $\quad$ $t: 2x - y - 1 = 0$

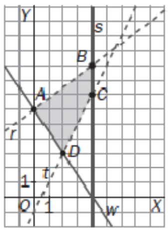
$s: x - 4 = 0$ $\quad$ $w: 3x + 2y = 12$

Se calculan sus puntos de intersección:

$r\cap w = A(0, 6)$ $\quad$ $s\cap t = C(4, 7)$

$r\cap s = B(4, 9)$ $\quad$ $t\cap w = D(2, 3)$

La intersección de todos los semiplanos correspondientes a las inecuaciones constituye la solución del sistema de inecuaciones.



3. Se calculan las ecuaciones de las rectas:

m, que pasa por los puntos $A(0, 8)$ y $B(4, 6)$:

$$m: x + 2y - 16 = 0$$

n, que pasa por los puntos $B(4, 6)$ y $C(4, 3)$:

$$n: x = 4$$

r, que pasa por $C(4, 3)$ y $D(2, 2)$:

$$r: x - 2y + 2 = 0$$

s, que pasa por $D(2, 2)$ y $E(0, 2)$:

$$s: y = 2$$

y el eje Y: $x = 0$.

Luego la región representada en la imagen se corresponde con el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x+2y-16\le 0\\ x\le 4\\ x-2y+2\le 0\\ x\ge 0;\quad y\ge 2\end{cases}$$

4. Se representan gráficamente las rectas

$r: x + 2y = 16$ $\quad$ $t: 2x - 3y = 6$

$s: 2x + y = 14$ $\quad$ $l: x + 3y = 3$

Se determina la región factible y se calculan, mediante intersección de las rectas, los vértices de la misma:

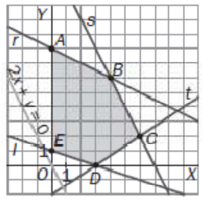
$r\cap Y = A(0, 8)$ $\quad$ $t\cap l = D(3, 0)$

$r\cap s = B(4, 6)$ $\quad$ $l\cap Y = E(0, 1)$

$s\cap t = C(6, 2)$

Para calcular los puntos en los que la función objetivo alcanza el máximo y el mínimo, se calcula el valor de la función $f(x, y)$ en cada uno de los vértices.

$$\begin{cases} f(0,8)=8\\ f(4,6)=14\\ f(6,2)=14\\ f(3,0)=6\\ f(0,1)=1\end{cases}$$



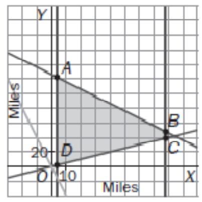
El máximo se alcanza tanto en el punto $B(4, 6)$ como en el $C(6, 2)$ y, por tanto, en cualquier otro punto del segmento BC, en los que la función vale 14. El mínimo se alcanza en el punto $E(0, 1)$, en el que la función vale 1. Gráficamente, también se comprueba este resultado.

5. a) Si llamamos x a la cantidad invertida en acciones del tipo A e y a la invertida en acciones del tipo B, la función objetivo que hay que maximizar es:

$$O(x, y) = 0{,}1x + 0{,}08y$$

b) Las restricciones y la región factible son:

$$\begin{cases} R_1\equiv x+y\le 126000\\ R_2\equiv 3600\le x\le 78000\\ R_3\equiv x\le 2y\\ R_4\equiv x\ge 0;\ y\ge 0\end{cases}$$



Los vértices de la región factible se calculan intersecando las rectas (puntos en miles de uds.):

$r\cap s = A(3{,}6;\ 122{,}4)$ $\quad$ $t\cap w = C(78, 36)$

$r\cap t = B(78, 48)$ $\quad$ $s\cap w = D(3{,}6;\ 1{,}8)$

c) Gráficamente, se observa que el máximo rendimiento se obtiene en el punto:

$$B(78\,000, 48\,000)$$

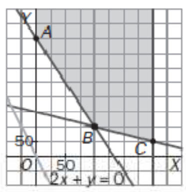
Y este es:

$O(78\,000, 48\,000) = 7800 + 3840 = 11\,640$ €

6. Si llamamos x a las unidades de producción instaladas de caldera de gas, e y a las de paneles solares, la función objetivo que hay que minimizar es $O(x, y) = 200x + 100y$.

Las restricciones y la región factible son:

$$\begin{cases} R_1\equiv 6x+2y\ge 800\\ R_2\equiv x+2y\ge 300\\ R_3\equiv x\le 200\\ R_4\equiv x\ge 0;\ y\ge 0\end{cases}$$



Sus vértices son $A(0, 400)$, $B(100, 100)$, $C(200, 50)$. El coste en cada uno de ellos es $O(0, 400) = 40\,000$ €; $O(100, 100) = 30\,000$ € y $O(200, 50) = 45\,000$ €.

Luego el coste mínimo de la instalación se consigue montando 100 unidades de producción de caldera de gas y 100 de paneles solares, y este coste asciende a 30 000 €. Gráficamente se observa que, en efecto, esa es la solución.