4 Programación lineal

ACTIVIDADES INICIALES

4.I. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $3x + 3(2x - 5) - 4(x - 2) \le 2 - x$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2}$

a) $3x + 6x - 15 - 4x + 8 \le 2 - x$

$3x + 6x - 4x + x \le 2 + 15 - 8$

$6x \le 9,\ x \le \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Solución: $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2}$

$\dfrac{3x}{6} - \dfrac{x-1}{6} > \dfrac{6}{6} - \dfrac{6x-15}{6}$

$3x - x + 1 > 6 - 6x + 15$

$3x - x + 6x > 6 + 15 - 1$

$8x > 20\ \ x > \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ Solución: $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$

4.II. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-2}{8} \le \dfrac{x}{2}$

b) $2x - 3 - \dfrac{x}{2} > x + \dfrac{3x+1}{6}$

a) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-2}{8} \le \dfrac{x}{2}$

$\dfrac{4x-12}{8} - \dfrac{x-2}{8} \le \dfrac{4x}{8}$

$4x - 12 - x + 2 \le 4x$

$-x \le 12 - 2$

$x \ge -10 \Rightarrow$ Solución: $[-10, +\infty)$

b) $2x - 3 - \dfrac{x}{2} > x + \dfrac{3x+1}{6}$

$\dfrac{12x}{6} - \dfrac{18}{6} - \dfrac{3x}{6} > \dfrac{6x}{6} + \dfrac{3x+1}{6}$

$12x - 18 - 3x > 6x + 3x + 1$

$12x - 3x - 6x - 3x > 1 + 18$

$0 > 19 \Rightarrow$ No tiene solución.

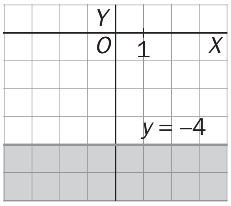
ACTIVIDADES PROPUESTAS

4.1. Representa los semiplanos determinados por las siguientes expresiones.

a) $y \leq -4$ **c)** $2x - 4y < 6$ **e)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} < 1$

b) $3x \geq 6$ **d)** $2(3x - 5) + (4y - 2) < 2$ **f)** $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} \geq -6$

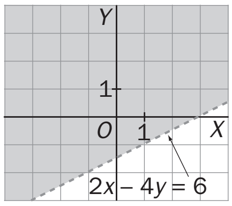
a)



Semiplano con borde.

El borde es una recta horizontal.

c)

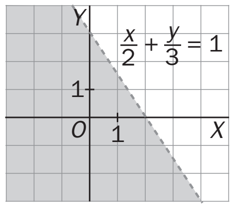


Semiplano sin borde.

Puntos del borde del semiplano:

$(3, 0)$ y $(0, -\frac{3}{2})$

e)

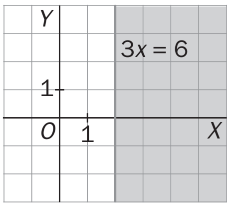


Semiplano sin borde.

Puntos del borde del semiplano:

$(2, 0)$ y $(0, 3)$

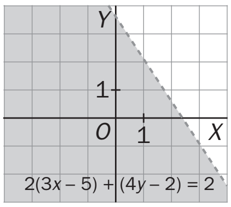
b)



Semiplano con borde.

El borde es una recta vertical.

d)

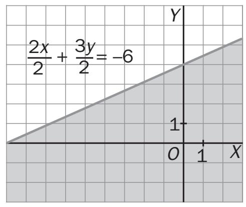


Semiplano sin borde.

Puntos del borde del semiplano:

$(-1, 5)$ y $(1, 2)$

f)



Semiplano con borde.

Puntos del borde del semiplano:

$(0, 4)$ y $(-9, 0)$

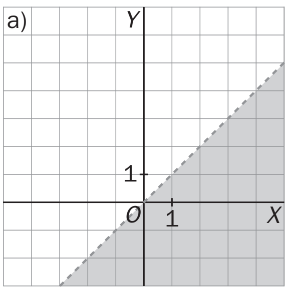
4.2. Comprueba si los puntos siguientes están o no a un mismo lado de la recta: $3x + 5y - 4 = 0$.

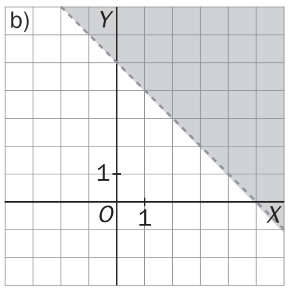
a) $A(-3,0)$ **y** $B(4,2)$ **b)** $A(2, -3)$ **y** $B(1, -2)$

a) $3 \cdot (-3) + 5 \cdot 0 - 4 = -13 < 0$ $3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 4 = 18 > 0 \Rightarrow$ *A* y *B* están a diferente lado de *r*.

b) $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) - 4 = -13 < 0$ $3 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) - 4 = -11 < 0 \Rightarrow$ *A* y *B* están a un mismo lado de *r*.

4.3. Establece las expresiones algebraicas que determinan cada uno de los siguientes semiplanos.





a) $x > y$ b) $x + y > 5$

4.4. Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales, representa la solución, calcula las coordenadas de sus vértices e indica si es o no acotada.

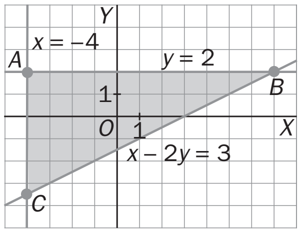
a) $\begin{cases} y \le 2 \\ x \ge -4 \\ x - 2y \le 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y \ge -2 \\ y \le 5 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3y \le 15 \\ 4x + y \le 16 \\ x - y \le 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y \le 0 \\ x - y \ge -3 \\ x \le 3 \end{cases}$

a) Solución acotada.

$A: \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow A(-4, 2)$

$B: \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(7, 2)$

$C: \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow C(-4, -\dfrac{7}{2})$

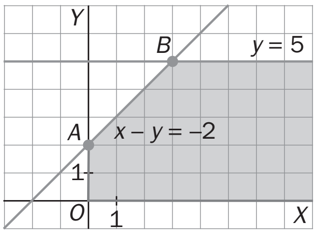


b) Solución no acotada.

$A: \begin{cases} x - y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 2)$

$B: \begin{cases} y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(3, 5)$

$O(0, 0)$



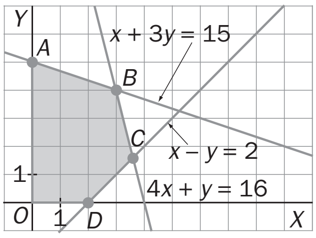
c) Solución acotada.

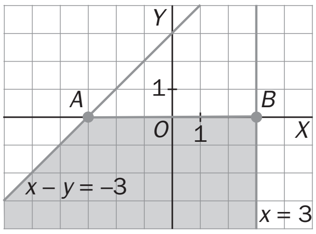
$A: \begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow A(0, 5)$

$B: \begin{cases} 4x + y = 16 \\ x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow B(3, 4)$

$C: \begin{cases} x - y = 2 \\ 4x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow C(\dfrac{18}{5}, \dfrac{8}{5})$

$D: \begin{cases} y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow D(2, 0), \quad O(0, 0)$





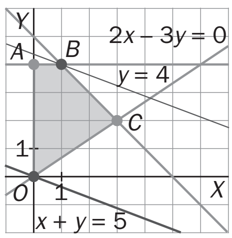
d) Solución no acotada.

$A: \begin{cases} y = 0 \\ x - y = -3 \end{cases} \Rightarrow A(-3, 0)$

$B: \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow B(3, 0)$

4.5. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal.

Max y Min $z = 3x + 8y$ **sujeto a:** $\begin{cases} 2x - 3y \le 0 \\ x + y \le 5 \\ y \le 4 \quad x \ge 0 \end{cases}$



Vértices: C: $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(3, 2)$, B: $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(1, 4)$, $A(0, 4)$, $O(0, 0)$

Valor de la función objetivo en los vértices:

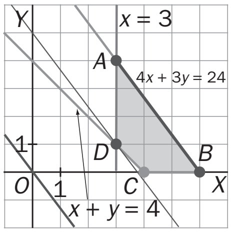
$z_A = 32$; $z_B = 35$; $z_C = 25$; $z_O = 0$

El máximo se obtiene en $x = 1$, $y = 4$, y vale 35, y el mínimo, en $x = 0$, $y = 0$, y vale 0.

4.6. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal.

Max y Min z = 10x + 7,5y sujeto a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y\geq 4} \\ \boldsymbol{4x+3y\leq 24} \\ \boldsymbol{x\geq 3 \quad y\geq 0} \end{cases}$$



Vértices:

A: $\begin{cases} 4x+3y=24 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow A(3,\ 4)$ B: $\begin{cases} 4x+3y=24 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B(6,\ 0)$

C: $\begin{cases} x+y=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(4,\ 0)$ D: $\begin{cases} x+y=4 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow D(3,\ 1)$

Valor de la función objetivo en los vértices:

$z_A = 60$ $z_B = 60$ $z_C = 40$ $z_D = 37{,}5$

El mínimo se obtiene en x = 3, y = 1, y vale 37,5.

El máximo se encuentra en cualquiera de los puntos pertenecientes al segmento de extremos A y B, y vale 60.

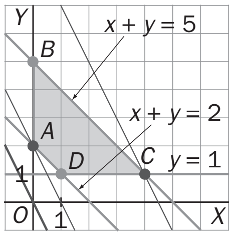
4.7. Resuelve de forma gráfica el siguiente problema.

Max y Min z = 10x + 5y sujeto a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y\leq 5} \\ \boldsymbol{x+y\geq 2} \\ \boldsymbol{x\geq 0 \quad y\geq 1} \end{cases}$$

La región factible es acotada.

La pendiente de la función objetivo es negativa.



El mínimo se obtiene en el vértice A: $\begin{cases} x=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 2$

El valor mínimo de la función es z = 10.

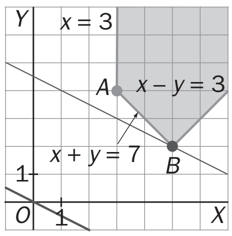
El máximo se obtiene en el vértice C: $\begin{cases} y=1 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow x = 4,\ y = 1$

El valor máximo de la función es z = 45.

4.8. Resuelve de forma gráfica el siguiente problema.

Max y Min z = x + 2y sujeto a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y\geq 7} \\ \boldsymbol{x-y\leq 3} \\ \boldsymbol{x\geq 3 \quad y\geq 0} \end{cases}$$



La región factible es no acotada.

La pendiente de la función objetivo es negativa.

El mínimo se obtiene en el vértice B: $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = 2$

El valor mínimo de la función es z = 9.

Cuando la recta variable se mueve hacia arriba, nunca deja de tocar puntos de la región factible.

Por tanto, no existe solución óptima para el máximo.

4.9. (PAU) En un comercio se vende café con dos tipos de mezcla, M_1 y M_2. La mezcla M_1 lleva dos partes de café natural y una parte de café torrefacto, y la mezcla M_2, una parte de café natural y dos partes de café torrefacto. Por cada kilo de M_1 se obtiene un beneficio de 1,10 euros, y por cada kilo de M_2 se obtiene un beneficio de 1,30 euros. Se cuenta con 35 kg de café natural y 40 kg de café torrefacto para mezclar. ¿Cuántos kilos de cada mezcla se deben preparar para que las ganancias sean máximas?

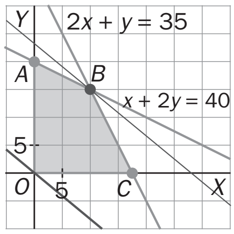
x : kg de M1, y : kg de M2 Función objetivo: z = 1,10x + 1,30y Restricciones: $\begin{cases} 2x+y\le 35 \\ x+2y\le 40 \\ x\ge 0 \quad y\ge 0 \end{cases}$

Vértices:

A: $\begin{cases} x+2y=40 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 20) \Rightarrow z_A = 26,$

B: $\begin{cases} x+2y=40 \\ 2x+y=35 \end{cases} \Rightarrow B(10,\ 15) \Rightarrow z_B = 30{,}5$

C: $\begin{cases} y=0 \\ 2x+y=35 \end{cases} \Rightarrow C(17{,}5;\ 0) \Rightarrow z_C = 19{,}25$



El máximo se alcanza en el vértice B, es decir, cuando se preparan 10 kg de M1 y 15 kg de M2.

La ganancia máxima es de 30,50 €.

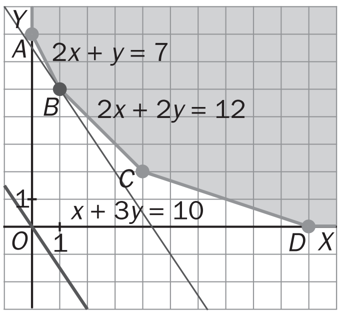
4.10. (PAU) Para la elaboración de un alimento para el ganado, una empresa láctea puede adquirir dos productos básicos, P_1 y P_2, y mezclarlos. La tabla siguiente muestra las unidades de nutrientes *A*, *B* y *C* que tiene cada kg de P_1 y P_2, las cantidades mínimas de *A*, *B* y *C* necesarias para que el producto sea adecuado y el coste, en unidades monetarias, de cada kg de P_1 y P_2:

	A	*B*	*C*	Precio
P_1	2	2	1	3
P_2	1	2	3	2
C. mínimas	7	12	10	

Halla la mejor mezcla de forma que el coste sea mínimo.

x :kg de P_1, y : kg de P_2 Función objetivo: z = 3x + 2y

Restricciones: $\begin{cases} 2x+y\ge 7 \\ 2x+2y\ge 12 \\ x+3y\ge 10 \\ x\ge 0 \quad y\ge 0 \end{cases}$ El mínimo se alcanza en el vértice



B : $\begin{cases} 2x+2y=12 \\ 2x+y=7 \end{cases} \Rightarrow B(1, 5).$

Es decir, se debe mezclar 1 kg de P_1 con 5 de P_2. El coste será de 13 unidades monetarias.

EJERCICIOS

Sistemas de inecuaciones lineales

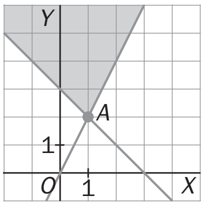
4.11. Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales, representa el recinto correspondiente a la solución y calcula las coordenadas de sus vértices. Indica si es o no acotado.

a) $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ y - 1 \geq 0 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x - 4y \leq -12 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ y \geq -3 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x + 3y \leq 15 \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 15 \\ x \geq 0 \;\; y \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 7 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + 2y \leq 0 \\ y \geq x \\ 5x + 6y \leq 8 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y \leq 4 \\ x + 3y \leq 15 \\ x \leq 6 \\ x \geq 0 \;\; y \geq 0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} y \leq x + 3 \\ y \leq -x + 9 \\ x + y \leq 3 \\ y \geq x - 3 \\ x \geq 1 \; x \leq 5 \end{cases}$

a) Recinto no acotado.

$A: \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, 2)$



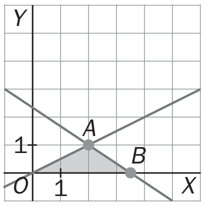
b) Recinto acotado.

$A: \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(2, 1)$

$B: \begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow$

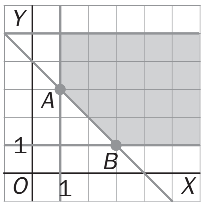
$\Rightarrow B\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$; $O(0, 0)$



c) Recinto no acotado.

$A: \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(1, 3)$

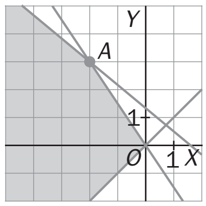
$B: \begin{cases} y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(3, 1)$



d) Recinto no acotado.

$A: \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(-2, 3)$

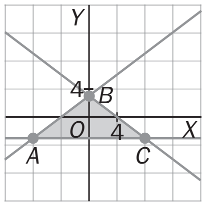


e) Recinto acotado.

$A: \begin{cases} y = -3 \\ 3x - 4y = -12 \end{cases} \Rightarrow A(-8, -3)$

$C: \begin{cases} y = -3 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow C(8, -3)$

$B: \begin{cases} 3x - 4y = -12 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow B(0, 3)$



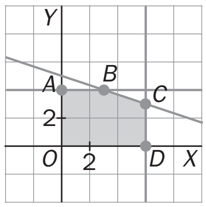
f) Recinto acotado.

$A: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(0, 4)$

$B: \begin{cases} x + 3y = 15 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(3, 4)$

$C: \begin{cases} x + 3y = 15 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow C(6, 3)$

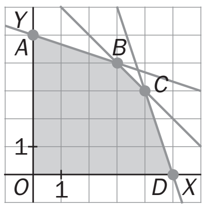
$D: \begin{cases} y = 0 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow D(6, 0)$; $O(0, 0)$



g) Recinto acotado.

$A: \begin{cases} x + 3y = 15 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 5)$; $B: \begin{cases} x + 3y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow B(3, 4)$; $C: \begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow C(4, 3)$

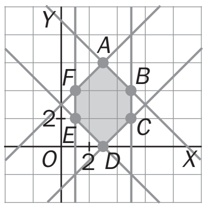
$D: \begin{cases} 3x + y = 15 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(5, 0)$; $O(0, 0)$



h) Recinto acotado.

$A: \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 9 \end{cases} \Rightarrow A(3, 6)$; $B: \begin{cases} y = -x + 9 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow B(5, 4)$; $C: \begin{cases} y = x - 3 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow C(5, 2)$;

$D: \begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow D(3, 0)$ $E: \begin{cases} x + y = 3 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow E(1, 2)$; $F: \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow F(1, 4)$



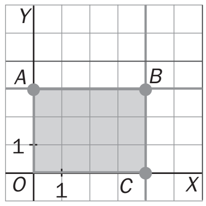
4.12. Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones, representa la solución e indica si alguna de las ecuaciones que lo forman es redundante.

a) $\begin{cases} x \le 4,\ x \le 6 \\ y \le 4,\ y \le 3 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2y \le x+6 \\ 4x+y \le 12 \\ x \le 4 \\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y \le x+2 \\ x+y \le 6 \\ x \le 4 \\ x+2y \ge 4 \\ x \ge 0\ ,y \ge 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y \ge -2x+4 \\ x+y \ge 3 \\ 2y+x \ge 4 \\ x+y \ge 2 \\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0 \end{cases}$

a) Las inecuaciones $x \le 6$ e $y \le 4$ son redundantes. Se puede prescindir de ellas.

$A: \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 3)$ $C: \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(4,\ 0)$

$B: \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B(4,\ 3)$ $O(0,\ 0)$

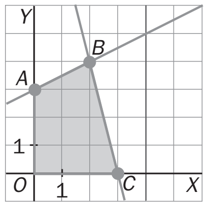


b) La inecuación $x \le 4$ es redundante. Se puede prescindir de ella.

$A: \begin{cases} 2y = x+6 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 3)$

$B: \begin{cases} 2y = x+6 \\ 4x+y=12 \end{cases} \Rightarrow B(2,\ 4)$

$C: \begin{cases} 4x+y=12 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(3,\ 0)$



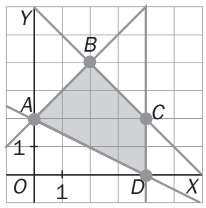
c) Las inecuaciones $x \ge 0$ e $y \ge 0$ son redundantes. Se puede prescindir de ellas.

$A: \begin{cases} y = x+2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 2)$

$B: \begin{cases} y = x+2 \\ x+y=6 \end{cases} \Rightarrow B(2,\ 4)$

$C: \begin{cases} x+y=6 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow C(4,\ 2)$

$D: \begin{cases} x=4 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow D(4,\ 0)$



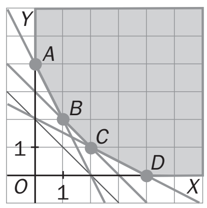
d) La inecuación $x + y \ge 2$ es redundante. Se puede prescindir de ella.

$A: \begin{cases} y = -2x+4 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 4)$

$B: \begin{cases} y = -2x+4 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow B(1,\ 2)$

$C: \begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow C(2,\ 1)$

$D: \begin{cases} x+2y=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D(4,\ 0)$



4.13. Se considera el sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y \le 8 \\ 2x + y \le 7 \\ 0 \le x \le 3, \ \ y \ge 0 \end{cases}$$

Comprueba si la intersección de las rectas *x* + 2*y* = 8 y *x* = 3 es o no vértice del recinto solución.

El punto de intersección de las dos rectas es: $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(3, \ \dfrac{5}{2}\right)$

Este punto no es vértice del recinto solución, ya que no verifica la segunda inecuación del sistema:

$2 \cdot 3 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{17}{2} > 7$

4.14. Se considera el sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 2y \le 7 \\ 2x + y \le 7 \\ 3x - y \le 7, \ x \ge 0, \ y \ge 0 \end{cases}$$

Comprueba si la intersección de las rectas 2*x* + *y* = 7 y 3*x* − *y* = 7 es o no vértice del recinto solución.

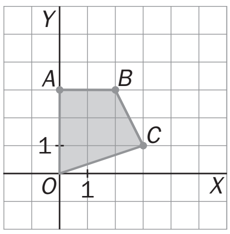
El punto de intersección de las dos rectas es: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{14}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$

Este punto es vértice del recinto solución, ya que verifica todas las inecuaciones del sistema:

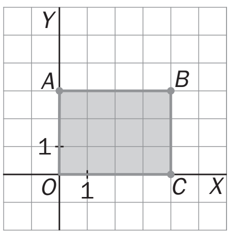
$\dfrac{14}{5} - \dfrac{14}{5} = 0 \le 4$, $\dfrac{14}{5} \ge 0$, $\dfrac{7}{5} \ge 0$

4.15. Escribe en cada caso un sistema de inecuaciones lineales que tenga como recinto solución la figura sombreada.

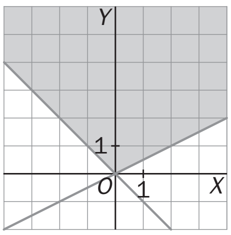
a)



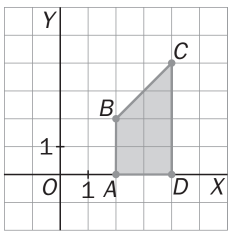
b)



c)



d)



a) $\begin{cases} x \ge 0 \quad y \le 3 \\ 2x + y \le 7 \\ 3y \ge x \end{cases}$

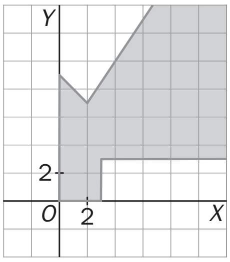
b) $\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \ge 0 \\ x - 2y \le 0 \end{cases}$

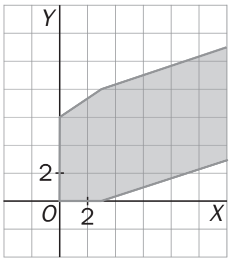
d) $\begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ y \le x \\ y \ge 0 \end{cases}$

4.16. En cada caso, indica si la región sombreada es acotada o no y si es convexa o no.

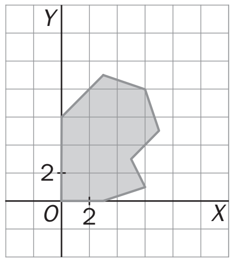
a)



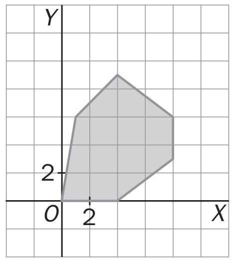
b)



c)



d)

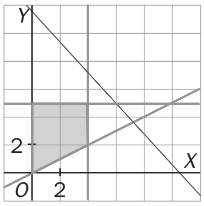


a) No acotada. No convexa b) No acotada. Convexa c) Acotada. No convexa d) Acotada. Convexa

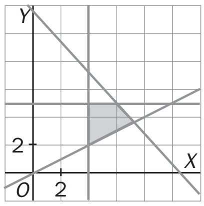
4.17. Dibuja en cada caso la región determinada por las siguientes condiciones. Señala también si existe alguna condición redundante o no.

a) $\begin{cases} y \le 5 \\ x \le 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 11 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y \le 5 \\ x \le 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \ge 11 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y \le 5 \\ x \ge 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 11 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y \ge 5 \\ x \ge 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 11 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$

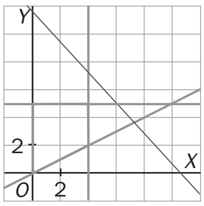
a) La condición $x + y < 11$ es redundante.



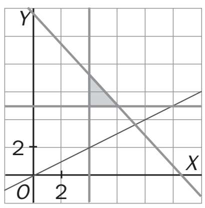
c) Las condiciones $x \ge 0$ e $y \ge 0$ son redundantes.



b) La región es vacía.

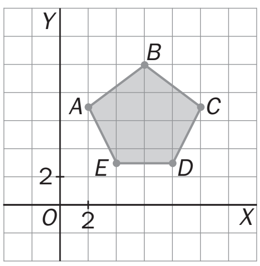


d) Las condiciones $x \ge 0$, $y \ge 0$ y $x - 2y \le 0$ son redundantes



Método analítico para resolver problemas de programación lineal

4.18. Evalúa la función objetivo $z = \frac{1}{2}x + \frac{7}{3}y$ en los vértices del recinto de la figura.



Los vértices del recinto son: $A(2, 7)$, $B(6, 10)$, $C(10, 7)$, $D(8, 3)$, $E(4, 3)$.

El valor de la función objetivo en ellos es:

$z_A = \frac{52}{3}$ $z_B = \frac{79}{3}$ $z_C = \frac{64}{3}$ $z_D = 11$ $z_E = 9$

4.19. (PAU) Resuelve de forma analítica los siguientes problemas de programación lineal.

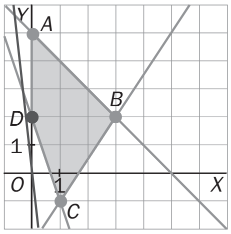
a) Min $z = 9x + y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ 3x + y \ge 2 \\ 3x - 2y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

b) Min $z = 4x + 5y$ sujeta a:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{8} \le 1 \\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{8} \ge 1 \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{4} \ge 1 \end{cases}$$

a) Vértices:



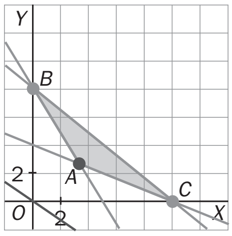
$$A: \begin{cases} x + y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,5) \qquad C: \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(1,-1)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(3,2) \qquad D: \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0,2)$$

Valor de la función objetivo: $z_A = 5$, $z_B = 29$, $z_C = 8$, $z_D = 2$.

El mínimo se obtiene en $x = 0$, $y = 2$, y vale 2.

b) Vértices:



$$A: \begin{cases} 8x + 5y = 40 \\ 2x + 5y = 20 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right), C: \begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ 2x + 5y = 20 \end{cases} \Rightarrow C(10,0)$$

$$B: \begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ 8x + 5y = 40 \end{cases} \Rightarrow B(0,8)$$

Valor de la función objetivo: $z_A = \dfrac{80}{3}$, $z_B = 40$, $z_C = 40$.

El mínimo se obtiene en $x = \dfrac{10}{3}$, $y = \dfrac{8}{3}$, y vale $\dfrac{80}{3}$.

4.20. (PAU) Resuelve de forma analítica los siguientes problemas de programación lineal.

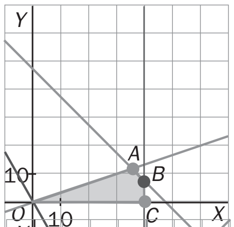
a) Max $z = 5x + 4y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x + y \le 48 \\ 3y \le x \\ x \le 40 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) Min $z = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}y$ sujeta a:

$$\begin{cases} 3x + 4y \ge 12 \\ x \ge y \\ x \le 20,\ y \le 10 \end{cases}$$

a) Vértices:



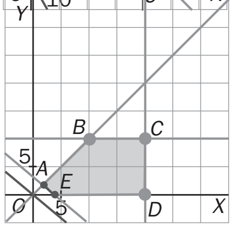
$$A: \begin{cases} x + y = 48 \\ 3y = x \end{cases} \Rightarrow A(36,12) \quad C: \begin{cases} x = 40 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(40,0)$$

$$B: \begin{cases} x = 40 \\ x + y = 48 \end{cases} \Rightarrow B(40,8) \qquad O(0,\ 0)$$

Valor de la función objetivo en los vértices: $z_A = 228$, $z_B = 232$, $z_C = 200$, $z_O = 0$

El máximo se obtiene en $x = 40$, $y = 8$, y vale 232.

b) Vértices:



$$A: \begin{cases} x = y \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right) \qquad C: \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow C(20,10)$$

$$E: \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow E(4,0) \qquad B: \begin{cases} x = y \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow B(10,10)$$

$$D: \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(20,0)$$

Valor de la función objetivo en los vértices: $z_A = 2$, $z_B = \dfrac{35}{3}$, $z_C = \dfrac{50}{3}$, $z_D = 10$, $z_E = 2$

El mínimo se obtiene en cualquier punto del segmento de extremos A y E, y vale 2.

Método gráfico para resolver problemas de programación lineal

4.21. (PAU) Resuelve de forma gráfica los siguientes problemas de programación lineal.

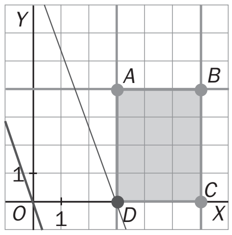
a) Min $z = 12x + 4y$ sujeta a:

$$\begin{cases} 3 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

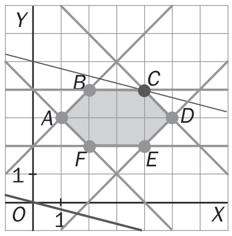
b) Max $z = 10x + 30y$ sujeta a:

$$\begin{cases} 4 \le x + y \le 8 \\ -2 \le x - y \le 2 \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$$

a) La región factible es acotada.
La pendiente de la función objetivo es negativa.
El mínimo se obtiene en el vértice D: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 0$, y vale $z = 36$.



b) La región factible es acotada.
La pendiente de la función objetivo es negativa.
El máximo se obtiene en el vértice C: $\begin{cases} x + y = 8 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4,\ y = 4$, y vale $z = 160$.



4.22. (PAU) Resuelve de forma gráfica los siguientes problemas de programación lineal.

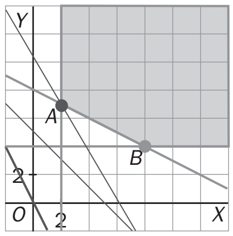
a) Máximo y mínimo de $z = 2x + y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge 4 \\ x + y \ge 5 \\ x + 2y \ge 16 \end{cases}$$

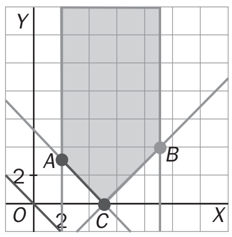
b) Máximo y mínimo de $z = x + y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 9 \\ x + y \ge 5 \\ x - 2y \le 5 \end{cases}$$

a) La región factible es no acotada.
La condición $x + y \ge 5$ es redundante.
La pendiente de la función objetivo es negativa.
El mínimo se obtiene en el vértice A: $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 7$, y vale $z = 11$.
No existe el máximo.



b) La región factible es no acotada.
La pendiente de la función objetivo es negativa.
El mínimo se obtiene en todos los puntos del segmento de extremos A y C, y vale $z = 5$.
No hay máximo.



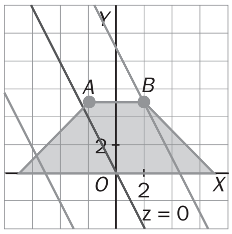
4.23. Comprueba que la función *f*(*x*, *y*) = 2*x* + *y* no alcanza ni máximo ni mínimo si está sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 7 \\ x - y \ge -7 \\ y \le 5 \end{cases}$$

La región factible es no acotada.

La pendiente de la función objetivo es negativa.

Según se desplaza la recta $2x + y = k$ tanto hacia arriba como hacia abajo, toca en todo momento a la región factible. Por tanto, los problemas de maximizar y de minimizar carecen de solución óptima.



4.24. Dibuja la región determinada por las condiciones:

$x - y \ge -3$ $x - 3y \ge -13$ $x + y \le 11$ $0 \le x \le 7$ $y \ge 0$

Halla el máximo y el mínimo de la función de dos variables f(*x*, *y*) = *x* − 2*y* cuando está sujeta a las anteriores condiciones.

Resuelve el problema por el método geométrico y teniendo en cuenta que la pendiente de la función objetivo es positiva.

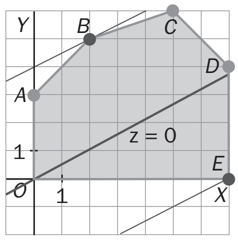
La región factible es acotada.

La pendiente de la función objetivo es positiva.

Por tanto, el máximo se alcanza en el último vértice por el que pasan las rectas paralelas a $x - 2y = k$ cuando se desplazan hacia abajo, y el mínimo, en el último vértice que tocan cuando se desplazan hacia arriba.

Máximo en E: $x = 7$, $y = 0$, y vale 7.

Mínimo en B: $x = 2$, $y = 5$, y vale −8.



4.25. Dibuja la región determinada por las condiciones:

$4x - 7y \le 0$ $7x - 2y \le 14$ $x + y \ge 0$ $x \ge -2$

Halla el máximo y el mínimo de la función de dos variables *f*(*x*, *y*) = *x* − 4*y* cuando está sujeta a las anteriores condiciones.

Resuelve el problema por el método geométrico y teniendo en cuenta que la pendiente de la función objetivo es positiva.

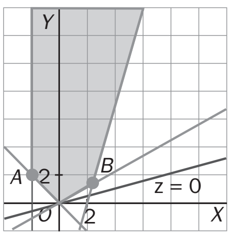
La región factible es no acotada.

La pendiente de la función objetivo es positiva.

Por tanto, el máximo se alcanza en el último vértice por el que pasan las rectas paralelas a $x - 4y = k$ cuando se desplazan hacia abajo, y el mínimo, en el último vértice que tocan cuando se desplazan hacia arriba.

Máximo en O: $x = 0$, $y = 0$, y vale 0.

El mínimo no existe.



PROBLEMAS

4.26.(PAU) Una empresa cuenta con tres empleados que trabajan durante 40 horas semanales para elaborar dos tipos de guitarras eléctricas, *G1* y *G2*. Cada unidad de *G1* requiere tres horas de trabajo, y cada unidad de *G2*, cuatro. Independientemente del tipo que sea, cada guitarra proporciona un beneficio de 75 euros.

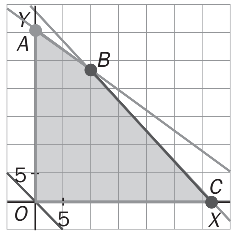
Un estudio de mercado señala que no se deben producir en total más de 32 guitarras semanales. Determina la producción para que los beneficios sean máximos.

x: unidades de *G1*

y: unidades de *G2*

Función objetivo: $z = 75x + 75y$

Restricciones: $\begin{cases} 3x + 4y \le 120 \\ x + y \le 32 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$



El máximo se obtiene en todos los puntos del segmento de extremos B y C : B: $\begin{cases} 3x + 4y = 120 \\ x + y = 32 \end{cases} \Rightarrow B(8, 24)$

C : $\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 32 \end{cases} \Rightarrow C(32, 0)$

El beneficio que se obtiene asciende a 2400 euros.

4.27.(PAU) Se desea fabricar comida para gatos de dos clases diferentes: gama alta y gama media. La comida está formada por una mezcla de carne, cereales y grasa animal en diferentes proporciones, según la gama. La mezcla de gama alta incluye 3 kg de carne, 2 kg de cereales y 1 kg de grasa animal por paquete, y produce un beneficio de 20 euros, mientras que la mezcla de gama media incluye 1 kg de carne, 2 kg de cereales y 2 kg de grasa animal por paquete, y produce un beneficio de 30 euros.

Se cuenta con un total de 105 kg de carne, 110 de cereales y 85 de grasa animal para elaborar las mezclas.

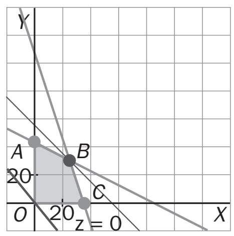
¿Cuántos paquetes de cada gama se deberán fabricar para que el beneficio producido sea máximo?

x : paquetes de gama alta

y : paquetes de gama media

Función objetivo: $z = 20x + 30y$

Restricciones: $\begin{cases} 3x + y \le 105 \\ 2x + 2y \le 110 \\ x + 2y \le 85 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$



El máximo se encuentra en el vértice B: $\begin{cases} 2x + 2y = 110 \\ x + 2y = 85 \end{cases} \Rightarrow B(25, 30)$

Se deben fabricar 25 paquetes de gama alta y 30 de gama baja, y se obtiene un beneficio de 1400 euros.

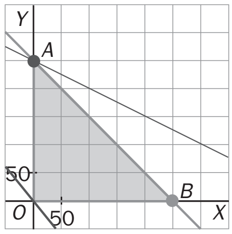
4.28. (PAU) En una empresa se editan revistas de dos tipos: de información deportiva y de cultura. Cada revista de información deportiva precisa dos cartuchos de tinta negra y uno de color y se vende a 3 euros. Cada revista de cultura precisa dos cartuchos de tinta negra y dos de color y se vende a 5 euros. Se dispone de 500 cartuchos de cada clase.

¿Cuántas revistas de cada tipo se deben editar para ingresar el máximo posible?

x : revistas de información deportiva

y : revistas de cultura

Función objetivo: $z = 3x + 5y$



Restricciones: $\begin{cases} 2x + 2y \le 500 \\ x + 2y \le 500 \\ x \ge 0 \;\; y \ge 0 \end{cases}$

El máximo es el vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 2y = 500 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 250)$

El máximo de ingresos se obtiene al editar 250 revistas de cultura y ninguna de información deportiva, y ascienden a 1250 euros.

4.29. (PAU) Para iluminar una sala de pintura es preciso colocar suficientes bombillas que sumen un total de 1440 vatios como mínimo. En el mercado se pueden adquirir bombillas incandescentes tradicionales de 90 vatios al precio de 1 euro la unidad y bombillas de bajo consumo de 9 vatios (equivalentes a 60 vatios) al precio de 5 euros la unidad.

Debido a la estructura del espacio, el número total de bombillas no puede ser mayor de 20. Por otra parte, las normas del Ayuntamiento imponen que, para este tipo de salas, el número de bombillas de bajo consumo no puede ser inferior a la mitad del de bombillas tradicionales.

Calcula el número de bombillas de cada clase que se debe colocar para que el coste sea mínimo.

x : bombillas de 90 w

y : bombillas de 9 w (equivalentes a 60 w)

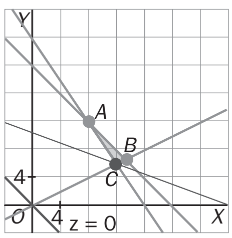
Función objetivo: $z = x + 5y$

Restricciones: $\begin{cases} 90x + 60y \ge 1440 \\ x + y \le 20 \\ 2y \ge x \\ x \ge 0 \;\; y \ge 0 \end{cases}$

El mínimo es el vértice C: $\begin{cases} 90x + 60y = 1440 \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow C(12,\ 6)$

El mínimo gasto se obtiene al iluminar la sala con 12 bombillas de 90 w y 6 de bajo consumo de 9 w.

El coste mínimo es de 42 euros.



4.30. (PAU) Dos jóvenes empresarios se disponen a abrir un negocio de informática. Montarán y comercializarán dos tipos de ordenador: el tipo *A* llevará una unidad de memoria de pequeña capacidad y un disco duro; el tipo *B* llevará una unidad de memoria de alta capacidad y dos discos duros. En total se cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad, 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador de tipo *A* esperan obtener 150 euros de beneficios, y por cada ordenador de tipo *B*, 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo?

b) ¿Cuáles serían los beneficios en ese caso?

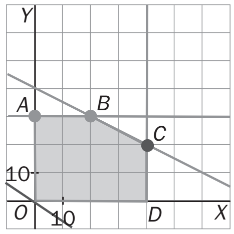
c) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado?

a) x : ordenadores de tipo *A*

y : ordenadores de tipo *B*

Función objetivo: $z = 150x + 250y$

Restricciones: $\begin{cases} x \le 40 \\ y \le 30 \\ x + 2y \le 80 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$



El máximo es el vértice *C*: $\begin{cases} x = 40 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow C(40, 20)$

La mejor decisión es montar 40 ordenadores de tipo *A* y 20 de tipo *B*.

b) Para este caso se obtendrían unos beneficios de 11 000 euros.

c) Con esta producción sobrarán 10 unidades de memoria de alta capacidad.

4.31. (PAU) En un taller de confección se van a elaborar trajes de cocinero y de camarero. Se dispone para ello de 30 m^2 de algodón, 10 m^2 de fibra sintética y 20 m^2 de lana. Para hacer cada traje de cocinero se precisan 1 m^2 de algodón, 2 m^2 de fibra sintética y 2 m^2 de lana. Cada unidad de este tipo deja 20 euros de beneficios. Para hacer cada traje de camarero se precisan 2 m^2 de algodón, 1 m^2 de fibra sintética y 1 m^2 de lana. Cada unidad de este tipo deja 30 euros de beneficios. Se deben confeccionar mayor o igual número de trajes de camarero que de cocinero y, como mínimo, se deben hacer un traje de cocinero y dos de camarero. El total no podrá ser superior a 20.

a) ¿Cuántos trajes de cada tipo se deberán confeccionar de forma que el beneficio sea máximo?

b) ¿Sobrará algún tipo de material?

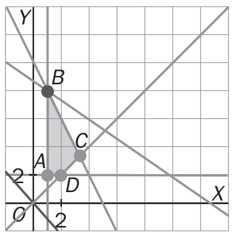
c) ¿Hay alguna condición redundante?

a) x : trajes de cocinero

y : trajes de camarero

Función objetivo: $z = 20x + 30y$

Restricciones: $\begin{cases} x + 2y \le 30 \\ 2x + y \le 10 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 20 \\ y \ge x \\ x \ge 1 \quad y \ge 2 \end{cases}$



El máximo es el vértice *B*: $\begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow B(1, 8)$

El beneficio máximo se obtiene confeccionando 1 traje de cocinero y 8 de camarero, y es de 260 euros.

b) Sobran 13 m^2 de algodón y 10 m^2 de lana.

c) Las condiciones $2x + y \le 20$ y $x + y \le 20$ son redundantes.

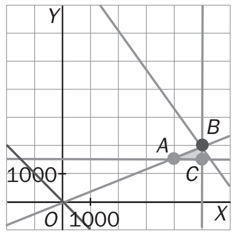
4.32. (PAU) Una empresaria desea invertir los beneficios de 7500 euros obtenidos en su negocio en dos tipos de acciones, *A* y *B*. El tipo *A* produce un interés anual esperado del 6%, y el tipo *B*, del 4%. Como máximo desea invertir 5000 euros en A, y como mínimo, 1500 euros en *B*. Además, desea que la inversión en *A* sea superior a dos veces y media la inversión en *B*.

¿Cómo deberá realizar la inversión para que las ganancias sean máximas?

x : euros en acciones de tipo A

y : euros en acciones de tipo B

Función objetivo: $z = 0{,}06x + 0{,}04y$



Restricciones: $\begin{cases} x+y \le 7500 \\ x \le 5000 \\ y \ge 1500 \\ x \ge 2{,}5y \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$ El máximo es el vértice B: $\begin{cases} x = 5000 \\ x = 2{,}5y \end{cases} \Rightarrow B(5000, 2000)$

Para obtener el máximo beneficio deben invertirse 5000 euros en acciones de tipo A y 2000 en las de tipo B. El beneficio obtenido en ese caso asciende a 380 euros.

4.33. (PAU) Una empresa de siderurgia cuenta con tres tipos de recursos productivos para fabricar dos tipos de aleaciones de hierro, A_1 y A_2: 1000 horas de trabajo de personal y 880 y 1160 toneladas, respectivamente, de dos materias primas, M_1 y M_2, que se deben mezclar.

Para fabricar una unidad de la aleación A1 se precisan 10 horas de trabajo de personal, 20 toneladas de M_1 y 50 toneladas de M_2. Para fabricar una unidad de la aleación A2 se precisan 40 horas de trabajo de personal, 50 toneladas de M_1 y 60 toneladas de M_2.

Gracias a un estudio de mercado, se supone que por cada unidad de A_1 se obtendrán unos beneficios de 125 unidades monetarias, y por cada unidad de A_2 se obtendrán 250 unidades monetarias.

a) Halla la producción que maximiza los beneficios.

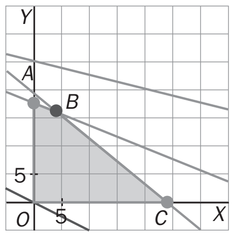
b) Indica si se genera algún tipo de excedente en los recursos productivos.

c) Si se produce una rebaja del 40% en los beneficios obtenidos por cada unidad de A_2 y se mantienen los obtenidos por cada unidad de A_1, ¿cómo variará la producción óptima?

a) x : unidades de A_1

y : unidades de A_2

Función objetivo: $z_1 = 125x + 250y$



Restricciones: $\begin{cases} 10x+40y \le 1000 \\ 20x+50y \le 880 \\ 50x+60y \le 1160 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$

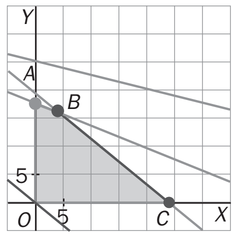
El máximo es el vértice B: $\begin{cases} 20x+50y = 880 \\ 50x+60y = 1160 \end{cases} \Rightarrow B(4, 16)$

El máximo de beneficios se obtiene cuando se producen 4 unidades de A_1 y 16 unidades de A_2, y es de 4500 u m.

b) Sobran 320 horas de trabajo de personal.

c) La nueva función objetivo es $z_2 = 125x + 150y$

En este caso, el máximo de producción se obtiene en cualquier punto del segmento de extremos B y C, y vale 2900 u m.



4.34. (PAU) Una empresa que empaqueta y comercializa cajas de cereales tiene dos factorías situadas en *A* y en *B*. Un hipermercado le encarga que, mensualmente, le provea como mínimo de 1125 cajas de cereales normales, 1350 cajas de cereales con chocolate y 1875 cajas de cereales con miel. La factoría *A* produce en una hora 75 cajas de cereales normales, 150 cajas de cereales con chocolate y 75 cajas de cereales con miel a un coste de 210 euros. La factoría *B* produce, también en una hora, 75, 225 y 90 cajas, respectivamente, de cada tipo de cereal a un coste de 180 euros por hora.

a) Calcula el número de horas que debe trabajar cada factoría para abastecer la demanda de forma que el coste sea mínimo.

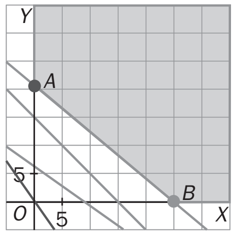
b) Calcula el valor de dicho coste mínimo.

a) x : número de horas que trabaja la factoría *A*.

y : número de horas que trabaja la factoría *B*.

Función objetivo: $z = 210x + 180y$

Restricciones: $\begin{cases} 75x + 75y \geq 1125 \\ 150x + 225y \geq 1350 \\ 75x + 90y \geq 1875 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$



El mínimo se encuentra en *A*: $\begin{cases} 75x + 90y = 1875 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0;\ 20{,}83)$

Por tanto, no se deben trabajar ninguna hora en *A* y 20,83 horas en *B* para que el coste sea mínimo.

b) El coste mínimo será de 3749,4 euros.

4.35. En cierta zona de una comunidad autónoma hay tres fábricas de televisores, O_1, O_2 y O_3, que proveen de aparatos a dos ciudades, D_1 y D_2.

Las producciones de las fábricas son:

O_1	O_2	O_3
100	150	225

Las demandas de las ciudades son:

D_1	D_2
175	300

Los costes de transporte, en euros, de cada unidad desde un punto de origen a uno de destino son:

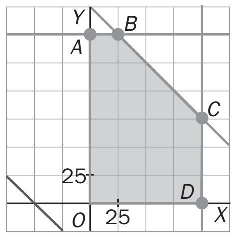
	D_1	D_2
O_1	10	8
O_2	6	5
O_3	4	5

Halla cuántos televisores deben llevarse desde cada fábrica a cada ciudad para que el coste total de los gastos de transporte sea mínimo. Calcula dicho coste mínimo.

	D_1	D_2	Total
O_1	x	$100 - x$	100
O_2	y	$150 - y$	150
O_3	$175 - x - y$	$x + y + 50$	225
Total	175	300	475

Función objetivo: $z = 10x + 8(100 - x) + 6y + 5(150 - y) + 4(175 - x - y) + 5(x + y + 50) = 3x + 2y + 2500$

Restricciones: $\begin{cases} x \leq 100 \\ y \leq 150 \\ x + y \geq -50 \\ x + y \leq 175 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$



El coste mínimo se obtiene en $O(0, 0)$.

Por tanto, han de llevarse 100 televisores de O_1 a D_2, 150 de O_2 a D_2, 175 de O_3 a D_1 y 50 de O_3 a D_2.

El coste para esos valores es de 2500 euros.

4.36.Las fábricas de automóviles de Fráncfort y de Milán proveen de un cierto modelo a las ciudades de París, Viena y Praga.

Las producciones de las fábricas son:

Fráncfort	Milán
150	100

Las demandas de las ciudades son:

París	Viena	Praga
125	100	25

Los costes de transporte, en unidades monetarias, de cada automóvil desde un punto de origen a uno de destino son:

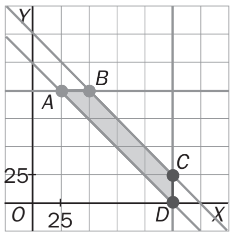
	París	Viena	Praga
Fráncfort	5	10	15
Milán	20	15	20

Halla cuántos automóviles deben llevarse desde cada fábrica a cada ciudad para que el coste total de los gastos de transporte sea mínimo y calcula dicho coste mínimo.

	París	Viena	Praga	Total
Fráncfort	x	y	$150 - x - y$	150
Milán	$125 - x$	$100 - y$	$x + y - 125$	100
Total	125	100	25	250

Función objetivo: $z = 5x + 10y + 15(150 - x - y) + 20(125 - x) + 15(100 - y) + 20(x + y - 125) = -10x + 3750$

Restricciones: $\begin{cases} x \le 125 \\ y \le 100 \\ x + y \ge 125 \\ x + y \le 150 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$



El mínimo se encuentra en todos los puntos pertenecientes al segmento de extremos $C(125, 25)$ y $D(125, 0)$.
Dos ejemplos de solución son

	París	Viena	Praga
Fráncfort	125	0	25
Milán	0	100	0

	París	Viena	Praga
Fráncfort	125	25	0
Milán	0	75	25

El coste mínimo será de 2500 euros.

4.37. (PAU) En un comedor escolar se desea diseñar un menú para los alumnos que debe cumplir las siguientes especificaciones.

- **El número de calorías no ha de ser inferior a 2000.**
- **Debe contener un total de, al menos, 60 g de proteínas.**
- **Debe contener un total de, al menos, 80 g de grasas.**

Para ello se dispone de dos platos con las siguientes características:

	Calorías	Proteínas	Grasas
1.er plato (100 g)	250	10	15
2.º plato (100 g)	800	15	20

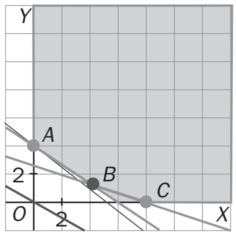
El precio de 100 g del segundo plato es doble del de 100 g del primer plato.

Halla cuántos gramos se deben servir de cada plato para que el coste sea mínimo.

Se sirven 100x gramos del primer plato y 100y gramos del segundo.

Función objetivo: $z = x + 2y$

Restricciones: $\begin{cases} 250x + 800y \geq 2000 \\ 10x + 15y \geq 60 \\ 15x + 20y \geq 80 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$



El mínimo es: $\begin{cases} 250x + 800y = 2000 \\ 10x + 15y = 60 \end{cases} \Rightarrow B(4{,}24;\ 1{,}18)$ deben servir 424 gramos del primer plato y 118 del segundo.

4.38. Una compañía que ofrece servicios de conexión rápida a internet quiere iniciar una campaña de captación de clientes mediante una serie de llamadas telefónicas elegidas al azar.

Las llamadas se pueden realizar a propietarios de viviendas de dos localidades diferentes, *A* y *B*. Por anteriores estudios de mercado se sabe que la probabilidad de que un vecino de la localidad *A* acepte el servicio es de 0,06, y de que lo haga un vecino de la localidad *B*, de 0,05.

El mencionado estudio indica también que, como mucho, se deberán realizar 20 llamadas a vecinos de *A* y 20 a vecinos de *B*. El total de llamadas no puede superar la cantidad de 30 y, por lo menos, se deberá llamar a 5 vecinos de cada ciudad.

Además y dado el coste de las llamadas, el número de vecinos consultados de *B* no podrá ser superior al de consultados de *A*.

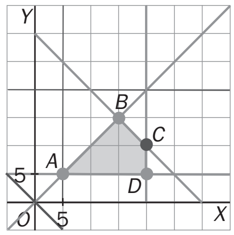
Calcula el número de llamadas que se deberán hacer a *A* y a *B* para maximizar el número de futuros clientes.

x : número de llamadas a A

y : número de llamadas a B

Función objetivo: $z = 0{,}06x + 0{,}05y$

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 30 \\ x \geq y \\ 5 \leq x \leq 20 \\ 5 \leq y \leq 20 \end{cases}$ El máximo se encuentra en C: $\begin{cases} x = 20 \\ x + y = 30 \end{cases} \Rightarrow C(20, 10)$

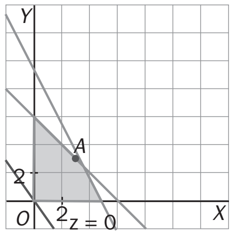


Por tanto, se deben realizar 20 llamadas a A y 10 a B para maximizar el número de futuros clientes.

4.39. Resuelve el problema de programación lineal entera.

Máximo $z = 8x + 5y$

Sujeto a: $\begin{cases} 9x + 5y \le 45 \\ x + y \le 6 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0, \text{ donde } x, y \in Z \end{cases}$

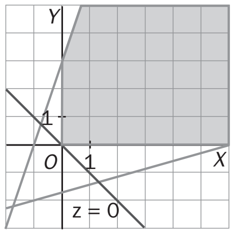


El máximo se encuentra en el punto $A(3\,,\ 3)$ en donde la función objetivo vale $z = 39$.

4.40. Resuelve el problema de programación lineal entera.

Máximo $z = x + y$

Sujeto a: $\begin{cases} x - 3y \le 6 \\ -3x + y \le 3 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \quad \text{donde } x,\ y \in Z \end{cases}$



Al ser una región no acotada no tendría máximo.
El mínimo se encuentra en el punto (0, 0) y vale $z = 0$.

4.41. Dado el siguiente problema de programación lineal. Máximo $z = 2x + \lambda y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x - 3y \ge -9 \\ 5x + 2y \le 25 \\ 0 \le x \le 5,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Halla los valores de λ para los cuales la solución óptima del problema se encuentra en el vértice *B*(3, 5). ¿Cuánto vale *z* en este caso?

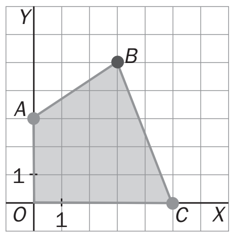
La región factible tiene por vértices:

$A\!: \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 3) \quad B\!: \begin{cases} 5x + 2y = 25 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases} \Rightarrow B(3,\ 5) \quad C\!: \begin{cases} x = 5 \\ 5x + 2y = 25 \end{cases} \Rightarrow C(5,\ 0)\ O(0,\ 0)$

El valor de z en los vértices es: $z_A = 3\lambda$, $z_B = 6 + 5\lambda$, $z_C = 10$, $z_D = 0$.

Para que el máximo se encuentre en B debe ocurrir:

$$\begin{cases} 6 + 5\lambda \ge 3\lambda \\ 6 + 5\lambda \ge 10 \\ 6 + 5\lambda \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \ge -3 \\ \lambda \ge \dfrac{4}{5} \\ \lambda \ge -\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \lambda \ge \frac{4}{5}$$



Por tanto, el valor de λ debe ser superior o igual a $\frac{4}{5}$. En este caso, $z = 6 + \lambda$.

4.42. Dado el siguiente problema de programación lineal: Mínimo $z = 3x + \lambda y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x + 2y \geq 5 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

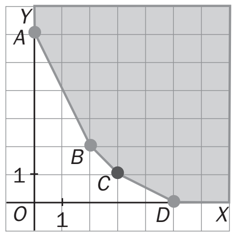
Halla los valores de λ para los cuales la solución óptima del problema se encuentra en el vértice *C*(3, 1). ¿Cuánto vale z en este caso?

La región factible tiene por vértices:

A: $\begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(0, 6)$ B: $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(2, 2)$ C: $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(3, 1)$ D: $\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(5, 0)$

El valor de z en los vértices es: $z_A = 6\lambda$, $z_B = 6 + 2\lambda$, $z_C = 9 + \lambda$, $z_D = 15$.

Para que el mínimo se encuentre en C debe ocurrir:



$$\begin{cases} 9 + \lambda \leq 6\lambda \\ 9 + \lambda \leq 6 + 2\lambda \\ 9 + \lambda \leq 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \geq \dfrac{9}{5} \\ \lambda \geq 3 \\ \lambda \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq \lambda \leq 6$$

El valor de λ debe estar entre 3 y 6. En este caso, la función $z = 9 + \lambda$.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la respuesta correcta en cada caso:

4.1. Se consideran los puntos *M*(6, 2) y *N*(1, –2), y el semiplano determinado por la expresión $2x - 3y > 6$:

A) El origen de coordenadas pertenece al semiplano.
B) Los dos puntos *M* y *N* pertenecen al semiplano.
C) El punto *M* pertenece, pero el *N* no.
D) El punto *N* pertenece, pero el *M* no.
E) Ninguno de los dos puntos pertenece al semiplano.

La respuesta correcta es la D) El punto *N* pertenece, pero el *M* no.

4.2. La recta $2x + 5y = k$ se desplaza de forma paralela desde el origen de coordenadas hacia la parte positiva del eje *Y*.

A) El valor de *k* es menor cuanto mayor es la distancia que separa a la recta del origen de coordenadas.
B) El valor de *k* es mayor cuanto mayor es la distancia que separa a la recta del origen de coordenadas.
C) El valor de *k* permanece constante.
D) Todas las anteriores afirmaciones son ciertas.
E) Todas las anteriores afirmaciones son falsas.

La respuesta correcta es la B. El valor de *k* es mayor cuanto mayor es la distancia que separa a la recta del origen de coordenadas, ya que al ser los coeficientes de *x* y de *y* positivos, el valor de *k* es mayor cuanto más se aleje la recta del origen de coordenadas en el sentido positivo del eje *Y*.

4.3. El interior del triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(-1, 0)$ y $C(1, -1)$ queda determinado por las siguientes condiciones.

A) $3y - x \geq 1$ $\quad 2x - y \geq 3$ $\quad x + 2y \geq 1$

B) $3y - x \leq 1$ $\quad 2x - y \geq 3$ $\quad x + 2y \leq -1$

C) $3y - x \leq 1$ $\quad 2x - y \leq 3$ $\quad x + 2y \geq 1$

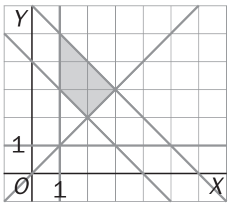
D) $3y - x \leq 1$ $\quad 2x - y \leq 3$ $\quad x + 2y \geq -1$

E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

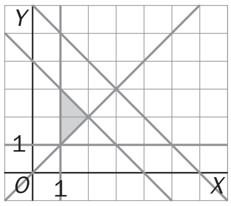
La solución correcta es la D: $3y - x \leq 1$, $2x - y \leq 3$, $x + 2y \geq -1$.
Los lados del triángulo son $3y - x = 1$, $2x - y = 3$, $x + 2y = 1$.

4.4. La región factible determinada por las restricciones $\begin{cases} 2x + 2y \leq 8 \\ x + y \leq 6 \\ y \geq x \\ x \geq 1,\ y \geq 1 \end{cases}$ **es:**

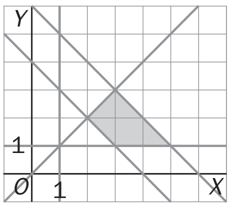
A)



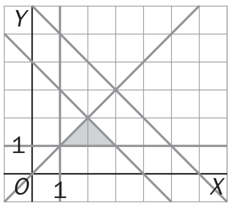
C)



B)



D)



E) ninguna de las anteriores opciones es cierta.

Se observa al estudiar la intersección de los cuatro semiplanos que la solución correcta es la C.

4.5. La solución del problema de programación lineal: Mínimo $z = 2x - 3y$. Sujeta a: $\begin{cases} 2x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

se alcanza en:

A) $x = 3$, $y = 0$ B) $x = 0$, $y = 3$ C) $x = 1$, $y = 1$ D) $x = -3$, $y = 0$ E) El problema no tiene solución.

La solución correcta es la E) El problema no tiene solución. Como el coeficiente de la función objetivo de *y* es negativo, el mínimo se alcanza en el último punto donde toca la recta $2x - 3y = k$ a la región factible en su desplazamiento hacia la parte positiva del eje *Y*. Se observa que nunca deja de tocarla.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

4.6. Se considera la región factible determinada por las restricciones:

$\{x + 3y \le 21,\ x + y \le 12,\ 4x + y \le 40,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

A) El punto (9, 4) pertenece a la región factible.

B) El punto (9, 4) es uno de los vértices de la región factible.

C) El punto $\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ es un vértice de la región factible.

D) El punto (5, 5) pertenece a la región factible.

E) El punto (5, 5) es uno de los vértices de la región factible.

Las soluciones correctas son la C, el punto $\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ es un vértice de la región factible, y la D, el punto (5, 5) pertenece a la región factible. El punto (9, 4) no pertenece a la región factible, ya que no verifica la 2.ª inecuación. Tampoco puede ser, por tanto, vértice. El punto $C\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ es un vértice, ya que verifica todas las inecuaciones y es solución de las dos primeras ecuaciones. El punto (5, 5) pertenece a la región factible, ya que verifica todas las inecuaciones, pero no es solución de un sistema de dos ecuaciones y, por tanto, no es vértice.

4.7. Se considera un problema de programación lineal con dos variables.

A) Si el punto (*a*, *b*) es una solución óptima del problema, entonces obligatoriamente es un vértice de la región factible.

B) Si el punto (*a*, *b*) es la única solución óptima del problema, entonces (*a, b*) obligatoriamente pertenece a la región factible.

C) Si el punto (*a*, *b*) es la única solución óptima del problema, entonces es obligatoriamente un vértice de la región factible.

D) Si (*a*, *b*) no pertenece a la región factible, entonces no puede ser solución del problema.

E) Todas las anteriores opciones son ciertas.

Las soluciones correctas son la B; la C y la D

.

Una solución puede ser óptima y no ser vértice, ya que puede ser una de las infinitas soluciones de un problema de programación lineal. Sin embargo, si es única, debe ser vértice. Obviamente, para que sea solución óptima, lo primero que debe verificar es que pertenezca a la región factible.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

4.8. Se considera un problema de programación lineal con dos variables y tal que la región factible no es vacía.

a)El problema no tiene solución. **b) La región factible es no acotada.**

A) a es equivalente a b.

B) a implica b, pero b no implica a.

C) b implica a, pero a no implica b.

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Nada de lo anterior es cierto.

La solución correcta es la B. Cuando la región factible es acotada, el problema de programación lineal siempre tiene por lo menos una solución. Pero puede ocurrir que la región sea no acotada y el problema tenga solución.

Señala el dato innecesario para contestar:

4.9. La región factible correspondiente a un problema de programación lineal está determinada por las siguientes restricciones.

a) $x + y \geq 5$ **b) $2x + 3y \leq 24$** **c) $4x - y \leq 20$** **d) $x + 6y \leq 30$**

A) La restricción a es redundante.

B) La restricción b es redundante.

C) La restricción c es redundante.

D) La restricción d es redundante.

E) Ninguna de las cuatro restricciones es redundante.

Al dibujar la región factible se obtiene que la solución correcta es la B.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar a la cuestión:

4.10. La región factible de un determinado problema de programación lineal es acotada. La función objetivo es f(x, y) = ax + by. Se afirma que el máximo de dicha función se alcanza en el último vértice que la recta ax + by = k toca a la región factible en su desplazamiento paralelo en dirección hacia $+\infty$ del eje *Y*.

1) $a > 0$, $b > 0$ **2) $a < 0$, $b > 0$**

A) Tanto la información 1 como la 2 son suficientes para asegurar que la afirmación es correcta.

B) La información 1 es suficiente, pero la 2 no.

C) La información 2 es suficiente, pero la 1 no.

D) Son necesarias las dos informaciones juntas.

E) Hacen falta más datos.

La solución correcta es la A. Al ser positivo el coeficiente de y en la función objetivo, el máximo de dicha función se alcanza en el último vértice que la recta $ax + by = k$ toca a la región factible en su desplazamiento paralelo en dirección hacia $+\infty$ del eje *Y*.